6 El Sistema Métrico Decimal

El intercambio de mercancías, el comercio, obliga a disponer de un sistema de medidas que sirva de referencia. Desde siempre, cualquier grupo humano de cierto nivel de civilización tuvo un sistema de medidas.

Los antiguos egipcios utilizaban medidas anatómicas: pies, brazos... El *codo* era la longitud del antebrazo del comerciante.

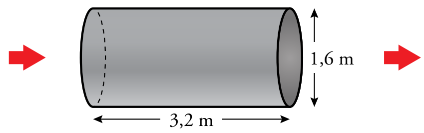
Al proliferar el negocio entre países y mejorar las comunicaciones, se hizo necesario crear un sistema de medidas universal. El *Sistema Métrico Decimal* (S.M.D.) se creó en Francia a finales del siglo XVIII y fue pronto adoptado por muchos países.

Actualmente, el 95% de la población mundial se rige por él.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

1 Las magnitudes y su medida

Para recopilar y transmitir información relativa a los objetos, atendemos a sus cualidades y propiedades características.



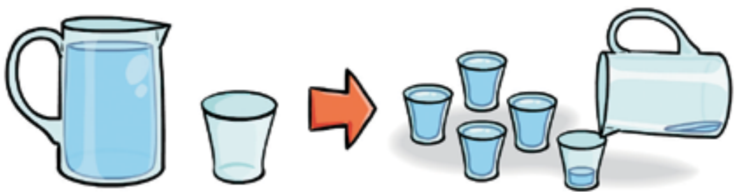
MATERIA: Acero inoxidable
COLOR: Gris metálico
FORMA: Cilíndrica
PESO: 483 kg
CAPACIDAD: 6,43 m³

Algunas de esas cualidades se pueden medir y cuantificar de forma numérica. Son las **magnitudes.**

Ejemplos de magnitudes: peso, longitud, superficie, temperatura, voltaje, intensidad del sonido, potencia de un motor, …

Qué es medir una magnitud

Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad fija y predeterminada llamada **unidad de medida.**



CANTIDAD A MEDIR — UNIDAD DE MEDIDA — LA JARRA TIENE UNA CAPACIDAD INFERIOR A 5 VASOS

Una magnitud se puede medir en distintas unidades. Para que la información que aporta una medida sea significativa, la unidad utilizada ha de ser conocida y aceptada por toda la comunidad. Es decir, debe ser **convencional** y estandarizada.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) El kilómetro es una magnitud.

b) El palmo es una unidad de longitud.

c) La capacidad de memoria de un ordenador es una magnitud.

d) La cinta métrica es una unidad de medida.

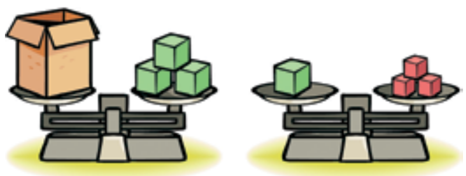
e) La balanza es un instrumento de medida.

f) El decibelio es una unidad que se utiliza para medir la intensidad del sonido.

2. El color y la forma son cualidades, pero no magnitudes. ¿Por qué?

3. Expresa el peso de la caja, tomando como unidad:

a) Un cubito verde. b) Un cubito rojo.



4. ¿Qué magnitudes se miden con estas unidades?:

a) Segundo. b) Bit. c) Grado centígrado.

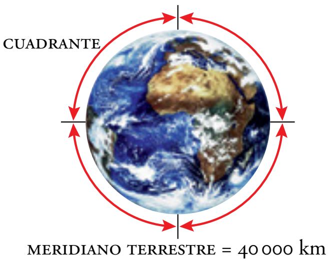
d) Gramo. e) Voltio. f) Metro cuadrado.

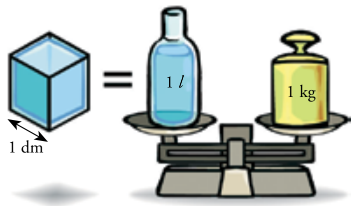
© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

2 El Sistema Métrico Decimal

A lo largo de la historia, cada región, cada país, cada grupo cultural ha adoptado sus propias unidades de medida, diferentes en cada caso.

La diversidad de unidades dificultaba la comunicación entre las distintas comunidades. Así surgió la necesidad de crear un sistema de medidas que fuera conocido y adoptado por todos los países. A finales del siglo XVIII (en 1792), la Academia de Ciencias de París propuso para tal fin el Sistema Métrico Decimal.





El **Sistema Métrico Decimal** (S.M.D.) es un conjunto de unidades de medida para las magnitudes básicas. Y está dotado de una estructura:

- Las unidades fundamentales están relacionadas entre sí.

MAGNITUD		UNIDAD FUDAMENTAL		
LONGITUD	→	EL METRO	→	Es la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre.
CAPACIDAD	→	EL LITRO	→	Es la capacidad de un cubo de un decímetro de arista.
PESO	→	EL GRAMO	→	Es el peso de un centímetro cúbico de agua.

- Además, cada unidad posee un juego de múltiplos y submúltiplos, relacionados por potencias de base 10, que se designan por los prefijos siguientes:

MÚLTIPLOS						SUBMÚLTIPLOS		
KILO	HECTO	DECA	←	UNIDAD	→	DECI	CENTI	MILI
1 000 U	100 U	10 U		1 U		0,1 U	0,01 U	0,001U

Piensa y practica

1. Investiga.

La **arroba** es una antigua unidad de peso que se usaba en muchas regiones de España. Desafortunadamente, no valía lo mismo en todas.

a) Averigua el valor, en kilos, de una arroba castellana y una arroba aragonesa.

b) Describe alguno de los inconvenientes que ocasionaban esas diferencias.

2. Nombra:

a) Los múltiplos del metro.

b) Los múltiplos del gramo.

c) Los submúltiplos del litro.

d) Los submúltiplos del gramo.

3. Teniendo en cuenta que un cuadrante del meridiano terrestre es la cuarta parte del mismo:

a) ¿Cuántos metros mide un cuadrante de meridiano?

b) ¿Cuántos metros mide el meridiano completo?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

3 Unidades de medida en las magnitudes básicas

Medida de la longitud

Como sabes, la unidad fundamental en el S.M.D. para medir longitudes es el **metro.** Recuerda sus múltiplos y submúltiplos:

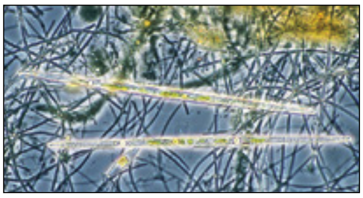
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m		0,1 m	0,01 m	0,001 m

Diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad del orden inmediato superior. Por eso, decimos que las unidades de longitud *van de diez en diez.*

Al manejar cantidades de longitud, conviene elegir la unidad adecuada. Así:

— Para expresar el grosor de este libro, diremos 14 milímetros o 1,4 centímetros, pero no 0,014 metros.

— Para expresar la distancia de Oviedo a Sevilla, diremos 665 kilómetros y no 66 500 000 centímetros.



Algas diatomeas al microscopio óptico.

■ Unidades para medir longitudes muy pequeñas

Con el avance de la ciencia y de la tecnología, se ha entrado en el mundo de lo microscópico, donde se necesitan unidades mucho más pequeñas que el milímetro. Estas son algunas:

- La **micra** → 1 μm = 0,001 mm (milésima de milímetro)

  Se utiliza para medir microorganismos (microbios, bacterias, etc.).
- El **nanómetro** → 1 nm = 0,000001 mm (millonésima de milímetro)
- El **ángstrom** → 1 Å = 0,000000001 mm.

  Se usa para medir distancias atómicas.

Galaxia del Sombrero, en la constelación de Virgo.

■ Unidades para medir longitudes muy grandes

Y para medir longitudes muy grandes, como distancias entre los astros, se utilizan unidades de enorme tamaño:

- La **unidad astronómica** → 1 UA ≈ 150 millones de kilómetros → Es la distancia media de la Tierra al Sol y se usa para medir distancias entre planetas.
- El **año luz** → 1 año luz ≈ 9,5 billones de kilómetros → Es la distancia que recorre la luz en un año. Se usa para medir distancias entre galaxias.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) La distancia de la Tierra al Sol es de 1 UA.

b) La distancia de Marte al Sol es mayor que un año luz.

c) El radio de un átomo se mide en ángstroms.

d) Diez mil micras hacen un milímetro.

2. ¿Con qué unidad medirías estas longitudes?:

a) La anchura de una carretera.

b) La longitud de un río.

c) El grosor de un tablero de madera.

d) El diámetro de un tornillo.

e) El diámetro del Sistema Solar.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

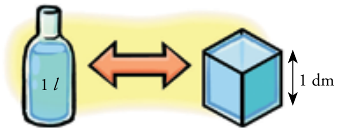
Unidades tradicionales

CELEMÍN (castellano) → 4,625 *l*

FANEGA → 12 celemines

Fanega, antigua medida de capacidad.

Ten en cuenta



1 litro → 1 dm^3

1 *kl* = 1 000 litros → 1 m^3

1 *ml* = 0,001 litros → 1 dm^3

Medida de la capacidad

La unidad fundamental del S.M.D. para medir capacidades es el **litro,** que coincide con la capacidad de un recipiente cúbico de un decímetro de arista.

Recuerda los múltiplos y los submúltiplos del litro:

kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*
1 000 *l*	100 *l*	10 *l*		0,1 *l*	0,01 *l*	0,001 *l*

Igual que en la longitud, cada unidad de capacidad del S.M.D. equivale a diez unidades del orden inmediato inferior. Es decir, las unidades de capacidad *van de diez en diez.*

Ejemplos

— La capacidad de una barrica es de 2,5 hectolitros, o 250 litros.

— Un bote de refresco tiene una capacidad de 33 centilitros.

Medida del peso

La unidad principal del S.M.D. para medir pesos es el **gramo,** que coincide con el peso del agua que cabe en un cubo de un centímetro de arista. Como es una unidad muy pequeña, en el peso de los objetos cotidianos se utiliza fundamentalmente el kilogramo.

Igual que en las unidades de longitud y de capacidad, los múltiplos y los submúltiplos del gramo *aumentan y disminuyen de diez en diez.*

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 g	100 g	10 g		0,1 g	0,01 g	0,001 g

Además, para medir pesos grandes, se añaden dos múltiplos del kilogramo:

- El **quintal métrico** (q) → 1 q = 100 kg
- La **tonelada métrica** (t) → 1 t = 1 000 kg

Ejemplos

— La cápsula para la gripe lleva 15 miligramos de principio activo.

— La pescadilla ha pesado 1,6 kilogramos.

— El camión carga 3,4 toneladas.

Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) Diez centilitros hacen un mililitro.

b) Diez decagramos hacen un hectogramo.

c) Un kilo de aceite pesa menos que un kilo de agua.

d) Un kilo de aceite ocupa más que un kilo de agua.

e) Un metro cúbico de agua pesa una tonelada.

f) Un cuarto de litro de agua pesa 500 gramos.

4. ¿Con qué unidad medirías en cada caso?:

a) La capacidad de un bote de champú.

b) El peso de una bolsa de naranjas.

c) El agua de un embalse.

d) La producción anual de mejillón en Galicia.

e) La cantidad de azafrán que se echa a la paella.

f) La cantidad de perfume en una muestra publicitaria.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

4 Cambios de unidad

Para cambiar de unidad cantidades de longitud, capacidad o peso, conviene que te apoyes en una tabla de múltiplos y submúltiplos. En ella, el cambio de unidad se reduce a un movimiento de la coma decimal.

Ejemplos

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	
3,5 km →	3,	5	0	0,				→ 3 500 m
27,4 cm →				0,	2	7,	4	→ 0,274 m

Observa que:

— Para pasar de una unidad a otra menor, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como saltos hay entre ambas en la tabla.

3,5 km → 3,5 · 1 000 = 3 500 m

TRES SALTOS
km - hm - dam - m

— Para pasar de una unidad a otra mayor, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como saltos hay entre ambas en la tabla.

27,4 cm → 27,4 : 100 = 0,274 m

DOS SALTOS
m - dm - cm

En la web
- Practica transformaciones con unidades de longitud.
- Practica transformaciones con unidades de capacidad y peso.

Piensa y practica

1. La altura del canguro está en la tabla. Exprésala…

m	dm	cm	mm
1	2	7	

a) … en metros. b) … en decímetros.
c) … en centímetros. d) … en milímetros.

2. Copia y completa en tu cuaderno.
a) 0,2 kg → 0,2 · 1 000 = … g
b) 5,3 hg → 5,3 · … = … g
c) 3,7 dg → 3,7 : 10 = … g
d) 280 cg → 280 : … = … g

3. Expresa en litros.
a) 2,75 *kl* b) 42,6 *dl* c) 74,86 *hl*
d) 350 *cl* e) 1,46 *dal* f) 3 800 *ml*

4. Pasa a hectómetros.
a) 6 km b) 0,54 km c) 80 dam d) 28 m

5. Convierte a miligramos.
a) 1,4 g b) 0,6 g c) 5 dg d) 62 cg

6. Copia y completa en tu cuaderno.
a) 3 kg = ... g b) 420 g = ... kg
c) 1,4 hg = ... dag d) 28,7 dg = ... g
e) 39 dg = ... mg f) 470 mg = ... cg

7. Expresa el peso del elefante en kilos, en gramos y en toneladas.

t	q		kg	hg	dag	g
4	6	0	0	0	0	0

¿Cuáles son las unidades más adecuadas para expresar el peso del elefante?

8. Copia y completa en tu cuaderno.
a) 4 q = ... kg b) 280 kg = ... q
c) 3,7 t = ... kg d) 9 700 kg = ... t

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

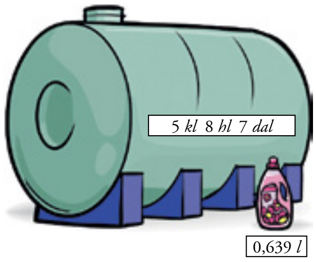
5 Cantidades complejas e incomplejas

Cuando una medida viene expresada en varias unidades, decimos que está expresada en **forma compleja.**

Cuando viene en una sola unidad, decimos que está en **forma incompleja.**

FORMA COMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA
2 m 5 dm	⟷	2,5 m	⟷	250 cm

Observa cómo pasamos de una forma a la otra.



Ejercicio resuelto

***a)* Expresar en litros la capacidad del depósito.**

***b)* Pasar a decilitros, centilitros y mililitros el contenido del bote de suavizante.**

	kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*	
5 *kl* 8 *hl* 7 *dal* →	5	8	7	0				→ 5 870 *l*
0,639 *l* →				0,	6	3	9	→ 6 *dl* 3 *cl* 9 *ml*

Operaciones con cantidades complejas

Para operar con cantidades en forma compleja, recurrimos también a la tabla de múltiplos y submúltiplos de la unidad principal.

Ejercicios resueltos

1. ***Un camión cisterna que transportaba 3 kl 5 hl 2 dal de gasóleo ha servido un pedido de 9 hl 7 dal 5 l. ¿Cuántos litros le quedan?***

	kl	*hl*	*dal*	*l*
	3	5	2	0
–		9	7	5
	2	5	4	5

(3 *kl* 5 *hl* 2 *dal*) – (9 *hl* 7 *dal* 5 *l*) = 2 545 *l*

Solución: En el depósito quedan 2 545 litros de gasóleo.

2. ***Cada frasco de cierto medicamento lleva 3 g 2 dg 4 cg de principio activo. ¿Cuántos gramos de principio activo se necesitan para fabricar 75 frascos?***

hg	dag	g	dg	cg
		3	2	4
		×	7	5
	1	6	2	0
2	2	6	8	
2	4	3,	0	0

3,24 g · 75 = 243 g

Solución: Se necesitan 243 gramos de principio activo.

Piensa y practica

1. Expresa en metros.

a) 6 km 4 hm 8 dam b) 5 hm 3 m 6 dm

c) 5 m 4 dm 7 cm d) 3 dam 7 cm 1 mm

2. Expresa en forma compleja.

a) 3,68 *kl* b) 7,42 *dl* c) 22,36 *hl*

d) 365 *cl* e) 2 364 *l* f) 2 408 *ml*

3. Fernando compra un pollo de 2 kg 200 g y un conejo de 0,760 kg.

¿Cuánto pesa la compra de Fernando?

4. Marta ha ido al supermercado a por cinco garrafas de aceite de dos litros. Pero se ha encontrado que cada garrafa llevaba 20 *cl* extra de regalo.

¿Cuánto aceite se lleva Marta en las cinco garrafas?

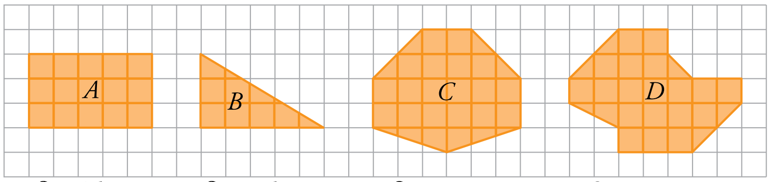
© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

6 Medida de la superficie

Para medir superficies, tomaremos como unidad la superficie encerrada dentro de un cuadrado (unidad cuadrada). Así, medir una superficie será averiguar cuántas unidades cuadradas contiene.

Ejemplos

→ UNIDAD CUADRADA → 1 u.c.



S_A = 15 u.c. S_B = 7,5 u.c. S_C = 23 u.c. S_D = 22,5 u.c.

Las unidades cuadradas se suelen definir a partir de las correspondientes unidades lineales.

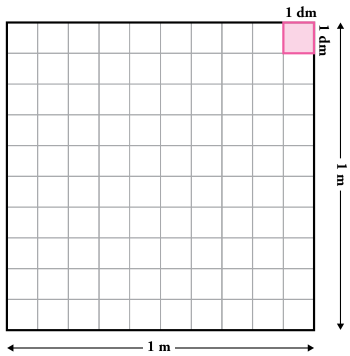
Unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal

La unidad principal de medida de superficie es el **metro cuadrado,** que se complementa con sus correspondientes múltiplos y submúltiplos.

100 100 100 100 100 100

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2		0,01m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2
	ha	a	ca			

Para comprender las equivalencias entre estas unidades, observa la figura siguiente, que representa un metro cuadrado y su descomposición en decímetros cuadrados:



- El metro cuadrado se divide en 10 filas de 10 decímetros cuadrados.

  Por tanto:

  $1\ m^2 = 10 \times 10\ dm^2 = 100\ dm^2$

- Lo mismo pasa con cada unidad respecto de la siguiente. Por eso decimos que las unidades de superficie *aumentan y disminuyen de cien en cien.*

Unidades agrarias

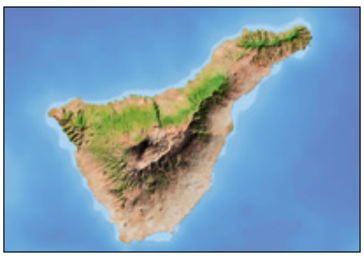
Se utilizan para medir campos (*agro* = = campo).

- **Hectárea** (ha)

  1 ha = 10 000 m^2 = 1 hm^2
- **Área** (a)

  1 a = 100 m^2 = 1 dam^2
- **Centiárea** (ca)

  1 ca = 1 m^2



La isla de Tenerife tiene una superficie de 2 034 km² = 203 400 ha.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Cambios de unidad

Para pasar cantidades de superficie de una unidad a otra, también utilizaremos una tabla, pero tendremos en cuenta que las unidades de superficie *aumentan y disminuyen de cien en cien.*

En la web
Practica transformaciones con unidades de superficie.

Ejercicio resuelto

Pasar estas medidas a las unidades indicadas:

a) ***47 200 m² = … hm²*** ***b)*** ***6,2 dm² = … cm²***

c) ***1,25 a = … m²*** ***d)*** ***252 800 m² = … ha***

	km²	hm² ha	dam² a	m² ca	dm²	cm²	mm²	
47 200 m² →		4,	7 2	0 0,				→ 4,72 hm²
6,2 dm² →					6,	2 0,		→ 620 cm²
1,25 a →			1,	2 5,				→ 125 m²
252 800 m² →		2 5,	2 8	0 0,				→ 25,28 ha

Observa que por cada salto de unidad en la tabla, la coma decimal se desplaza **dos lugares.** (Cada salto equivale a multiplicar o dividir por 100).

Observa

DOS SALTOS

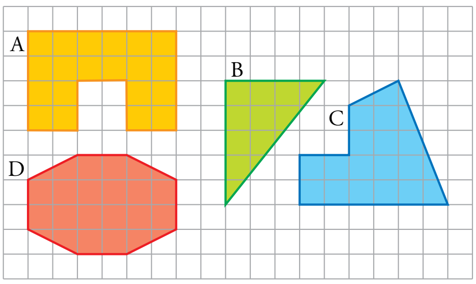
hm²	dam²	m²
4,	72	00,

CUATRO LUGARES

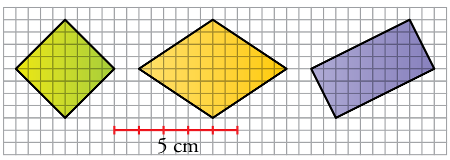
47 200 m² = 47 200 : 10 000 =
= 4,72 hm²

Piensa y practica

1. Calcula la superficie de estas figuras tomando como unidad el cuadrado de la cuadrícula:



2. Calcula, en centímetros cuadrados, la superficie del cuadrado, la del rombo y la del rectángulo.



3. Indica la unidad más apropiada para expresar las superficies siguientes:

a) La extensión de Portugal.

b) La extensión de un pantano.

c) La superficie de una vivienda.

d) La superficie de una hoja de papel.

4. Expresa en metros cuadrados.

a) 0,006 km² b) 5,2 hm² c) 38 dam²

d) 70 dm² e) 12 800 cm² f) 8 530 000 mm²

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,1 km² = ... hm² b) 825 hm² = ... km²

c) 0,03 hm² = ... m² d) 53 000 m² = ... dam²

e) 420 cm² = ... mm² f) 52 800 mm² = ... dm²

6. Pasa a forma compleja.

a) 587,24 hm² b) 587 209,5 m² c) 7 042,674 dm²

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Magnitudes y unidades

1. ¿Verdadero o falso?

a) El radio de la Luna se mide en unidades astronómicas.

b) El radio de una célula se expresa en micras.

c) La cantidad de aire de una habitación se mide en metros cuadrados.

d) Para expresar el peso de una locomotora, lo adecuado es usar las toneladas.

e) La cantidad de gasoil que transporta un camión se puede expresar en litros y en kilos.

NOTA: en caso de "falso", escribe la opción verdadera.

2. Asocia cada enunciado con su medida:

a) Una zancada.

b) La altura de un edificio.

c) Una cucharadita de jarabe.

d) El gasoil que transporta un camión cisterna.

e) El peso de un gato.

f) La cosecha de maíz de una finca.

g) La lona de una tienda de campaña.

h) La superficie de una finca.

27 m	6,8 m^2	6,7 *t*	8 *ml*
95 *hl*	80 cm	3,4 ha	2 500 g

Cambios de unidades

3. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 2,7 hm = … km = … dam = … dm

b) 2 380 m = … km = … hm = … cm

c) 47 m = … dam = … dm = … hm

d) 382 cm = … m = … dm = … mm

4. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,4 t = … kg = … hg = … dag

b) 0,005 kg = … g = … mg = … dag

c) 7 hg = … dag = … g = … dg

d) 42 g = … dag = … cg = … mg

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 4,52 *kl* = … *hl* — b) 0,57 *hl* = … *dal*

c) 15 *dal* = … *l* — d) 0,6 *l* = … *cl*

e) 850 *ml* = … *dl* — f) 1 200 *cl* = … *l*

g) 2 000 *ml* = … *dl* — h) 380 *dal* = … *kl*

6. Expresa, primero en kilogramos y después en miligramos, el peso de la barra de pan.

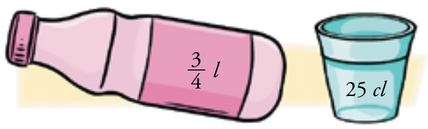
7. Expresa en centilitros.

a) 0,15 *hl* — b) 0,86 *dal*

c) 0,7 *l* — d) 1,3 *l*

e) 26 *dl* — f) 580 *ml*

8. Expresa en decilitros la capacidad de la botella, y con una fracción de litro, la capacidad del vaso.



9. Expresa en metros.

a) 3 km 8 hm 5 dam

b) 8 dam 5 m 7 cm

c) 1 m 4 dm 6 cm 7 mm

10. Expresa en gramos.

a) 4 kg 5 hg 2 dag 3 g

b) 9 hg 8 dag 5 g 4 dg

c) 6 dag 8 g 6 dg 8 cg

d) 7 dg 6 mg

11. Traduce a litros.

a) 8 *kl* 6 *hl* 3 *l*

b) 5 *hl* 2 *dal* 7 *l* 2 *dl*

c) 1 *dal* 9 *l* 6 *dl* 3 *cl*

d) 4 *l* 2 *dl* 5 *cl* 7 *ml*

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Unidades de superficie

12. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 1 km^2 = ... m^2 b) 1 m^2 = ... dm^2

c) 1 hm^2 = ... m^2 d) 1 m^2 = ... cm^2

e) 1 dam^2 = ... m^2 f) 1 m^2 = ... mm^2

13. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 4 km^2 = ... dam^2 b) 54,7 hm^2 = ... m^2

c) 0,005 dam^2 = ... dm^2 d) 0,7 dm^2 = ... mm^2

e) 5 400 m^2 = ... hm^2 f) 174 cm^2 = ... dm^2

14. Pasa a decímetros cuadrados.

a) 0,146 dam^2 b) 1,4 m^2 c) 0,36 m^2

d) 1 800 cm^2 e) 544 cm^2 f) 65 000 mm^2

15. Expresa en forma compleja.

a) 248 750 dam^2 b) 67 425 m^2

c) 83 545 cm^2 d) 2 745 600 mm^2

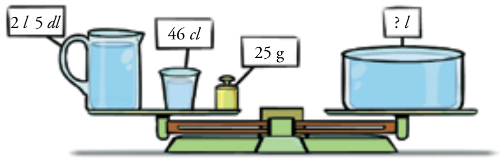
Resuelve problemas

16. Cada cápsula de cierto medicamento contiene 20 mg de principio activo. ¿Qué cantidad de principio activo se necesita para fabricar 100 000 cápsulas?

17. ¿Cuántas zancadas necesita un corredor de maratón para completar la prueba (42,192 km) si avanza, por término medio, 1,25 m en cada zancada?

18. Un metro cúbico es un cubo de un metro de arista. Teniendo eso en cuenta, ¿cuánto pesa un metro cúbico de agua?

19. ¿Cuánta agua hay en el recipiente que ocupa el platillo derecho de la balanza?



Autoevaluación

1. Indica la unidad adecuada, en cada caso, para medir estas magnitudes:

a) La anchura de un campo de fútbol.

b) El grosor de un folio.

c) La capacidad de un frasco de perfume.

d) El peso de la carga de un camión.

2. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,2 km = … hm b) 18 hm = … m

c) 0,07 m = … cm d) 345 mm = … cm

3. Expresa en forma compleja.

a) 2 537 m b) 35,42 *dal*

c) 0,856 kg d) 2 348 mm

4. Expresa en forma incompleja.

a) 3 hm 8 dam 4 m 5 dm

b) 5 *l* 6 *dl* 7 *cl*

c) 5 kg 7 dag 8 g

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5 hm^2 = … ha

b) 3,5 hm^2 = … m^2

c) 3 450 mm^2 = … cm^2

6. Pasa a forma incompleja.

a) 2 km^2 15 hm^2 23 dam^2 = … m^2

b) 35 m^2 12 dm^2 9 cm^2 = … dm^2

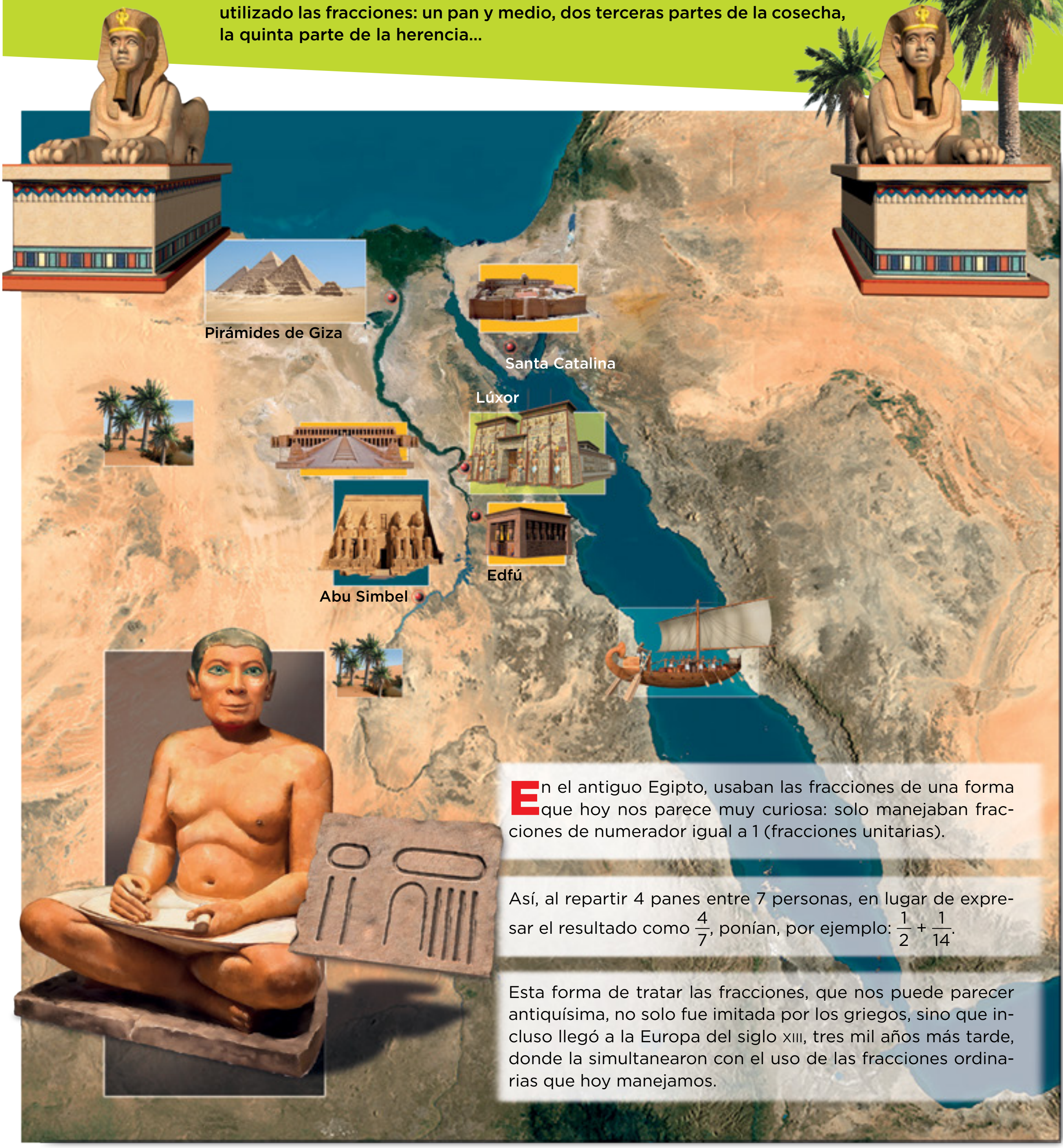
7. Un camión transporta 8 palés de café. Cada palé lleva 60 cajas, y cada caja, 75 paquetes de café de 250 gramos. ¿Cuántas toneladas de café transporta el camión?

8. Un grifo averiado pierde una gota de agua por segundo. Si estimamos que el volumen de una gota es de 0,05 *ml*, ¿cuánta agua pierde el grifo en un día?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

7 Las fracciones

Desde épocas remotas, para expresar partes de la unidad dividida, se han utilizado las fracciones: un pan y medio, dos terceras partes de la cosecha, la quinta parte de la herencia…



En el antiguo Egipto, usaban las fracciones de una forma que hoy nos parece muy curiosa: solo manejaban fracciones de numerador igual a 1 (fracciones unitarias).

Así, al repartir 4 panes entre 7 personas, en lugar de expresar el resultado como $\frac{4}{7}$, ponían, por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$.

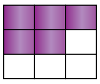
Esta forma de tratar las fracciones, que nos puede parecer antiquísima, no solo fue imitada por los griegos, sino que incluso llegó a la Europa del siglo XIII, tres mil años más tarde, donde la simultanearon con el uso de las fracciones ordinarias que hoy manejamos.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

1 El significado de las fracciones

Una fracción se puede contemplar como una parte de la unidad, como un operador o como una división. Veamos cada uno de esos conceptos con mayor detalle.

Recuerda



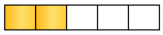
$\frac{5}{9}$ → NUMERADOR / → DENOMINADOR

El numerador indica las partes que se toman. El denominador, las partes en que se divide la unidad.

Las fracciones expresan partes de la unidad

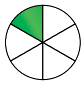
Un todo se toma como unidad y se divide en porciones iguales. Una fracción indica una determinada cantidad de esas porciones.

UNIDAD



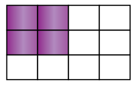
$\frac{2}{5}$ → Dos quintos

UNIDAD



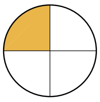
$\frac{1}{6}$ → Un sexto

UNIDAD

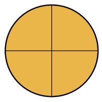


$\frac{4}{12}$ → Cuatro doceavos

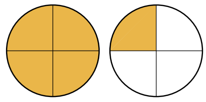
Una fracción puede representar una cantidad menor, igual o mayor que una unidad. Observa:



$\frac{1}{4} < 1$



$\frac{4}{4} = 1$



$\frac{5}{4} > 1$

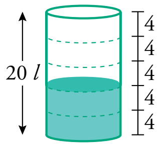
En la web

Averigua si has entendido el concepto de fracción.

Practica con el concepto de fracción.

Las fracciones son operadores

Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



En el bidón hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros. $\begin{cases} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 20 : 5 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 4 \cdot 2 = 8 \end{cases}$

$\frac{2}{5}$ de 20 litros = (20 : 5) · 2 = 8 litros

En la web

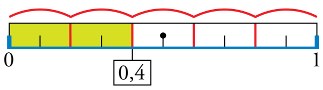
Practica con las fracciones como operadores.

Para calcular la **fracción de un número,** se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

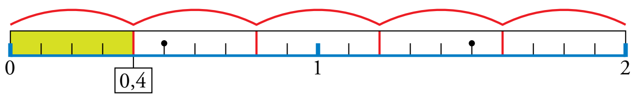
Las fracciones son divisiones indicadas

Observa:

- $\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2.



- 2 : 5 → Dividimos dos unidades entre 5.



$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

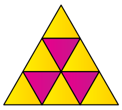
Una fracción equivale al cociente entre el numerador y el denominador.

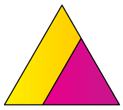
© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

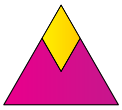
Piensa y practica

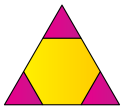
En la web Practica el concepto de fracción.

1. Escribe la fracción que ocupa la parte amarilla en cada figura:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Representa las fracciones siguientes:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$

3. Indica, para cada fracción, si es menor, igual o mayor que la unidad:

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{6}$ d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{3}{3}$ f) $\frac{5}{6}$

4. ¿Verdadero o falso?

a) Una fracción es un número.

b) Una fracción nunca expresa un número exacto de unidades.

c) Si el denominador es mayor que el numerador, la fracción es mayor que uno.

d) Entre dos fracciones con el mismo numerador, es mayor la que tenga menor denominador.

5. Reflexiona y contesta.

a) ¿Qué fracción del año es un trimestre?

b) ¿Qué fracción del día son dos horas?

c) ¿Qué fracción de hora son diez minutos?

d) ¿Qué fracción de minuto son 15 segundos?

6. Las siete décimas partes de los clientes de una tienda de discos tienen menos de 25 años. ¿Qué fracción de los clientes tienen 25 años o más?

7. Calcula mentalmente.

a) $\frac{1}{4}$ de 8 b) $\frac{1}{3}$ de 12 c) $\frac{1}{5}$ de 20

$\frac{3}{4}$ de 8 $\frac{2}{3}$ de 12 $\frac{3}{5}$ de 20

d) $\frac{1}{6}$ de 18 e) $\frac{1}{7}$ de 14 f) $\frac{1}{8}$ de 40

$\frac{5}{6}$ de 18 $\frac{2}{7}$ de 14 $\frac{5}{8}$ de 40

8. Calcula.

a) $\frac{2}{5}$ de 15 b) $\frac{3}{4}$ de 12 c) $\frac{3}{7}$ de 21

d) $\frac{2}{3}$ de 30 e) $\frac{4}{5}$ de 30 f) $\frac{3}{8}$ de 24

g) $\frac{3}{4}$ de 48 h) $\frac{2}{3}$ de 72 i) $\frac{3}{5}$ de 85

9. Opera.

a) $\frac{1}{4}$ de 384 b) $\frac{3}{5}$ de 715 c) $\frac{5}{7}$ de 483

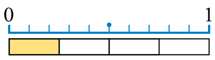
10. En mi clase, entre chicos y chicas, somos 27. Las chicas representan los 4/9 del total. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en clase?

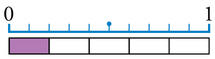
11. En un campamento internacional de verano hay 280 campistas, de los que 3/7 son españoles. ¿Cuántos españoles hay en el campamento?

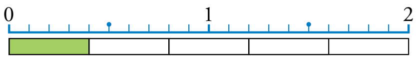
12. El pollo está hoy en el mercado a 5 € el kilo. ¿Cuánto cuesta un pollo de un kilo y tres cuartos?

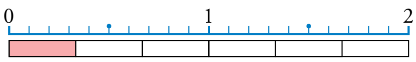
13. Según una encuesta, de cada 100 personas con empleo, solo cuatro trabajan en domingo, y del resto, las dos terceras partes tampoco trabajan en sábado. ¿Qué fracción de las personas empleadas no trabaja ni sábados ni domingos?

14. Expresa cada división con una fracción que represente el mismo valor:

a) 1 : 4 → 

b) 1 : 5 → 

c) 2 : 5 → 

d) 2 : 6 → 

15. Representa, reflexiona y di si estos enunciados son verdaderos o falsos:

a) La mitad de cinco es tanto como cinco mitades.

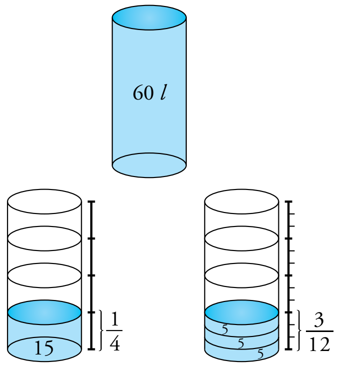
b) La tercera parte de dos vale lo mismo que los dos tercios.

c) La quinta parte de tres es lo mismo que tres quintos de uno.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

2 Fracciones equivalentes

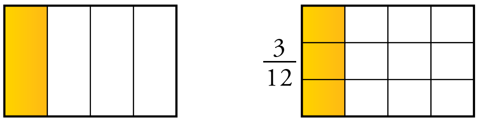
Ejemplo



$\frac{1}{4}$ de 60 = 15 $\qquad$ $\frac{3}{12}$ de 60 = 15

Fracciones diferentes con el mismo valor

Observa que las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ expresan el mismo valor, aunque sus términos sean diferentes:

$\frac{1}{4}$  $\frac{3}{12}$

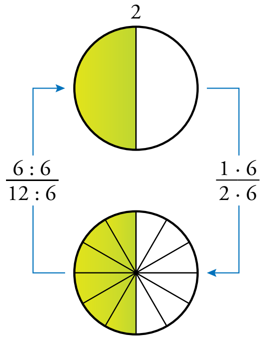
$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$ $\qquad$ $\frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

> Decimos que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad; es decir, cuando tienen el mismo valor numérico.

Observa

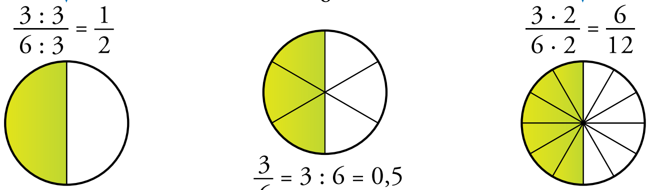


Cómo obtener fracciones equivalentes

Observa que al multiplicar o al dividir los dos términos de una fracción por el mismo número, la porción de unidad representada no varía.

$$\frac{3}{6}$$

$\frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{6}{12}$



$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$ $\qquad$ $\frac{3}{6} = 3 : 6 = 0{,}5$ $\qquad$ $\frac{6}{12} = 6 : 12 = 0{,}5$

Como ves, las tres fracciones que aparecen arriba, son equivalentes. $\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$

> **Propiedad fundamental de las fracciones**
>
> Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

Ejemplos

- $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

  $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{8}{12}$.

- $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$

  $\frac{15}{20}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$.

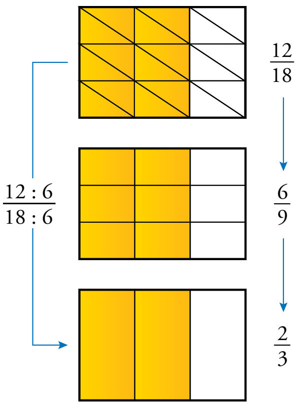
© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

En la web

Practica con las fracciones equivalentes.

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto se consigue **dividiendo** los dos términos por el mismo número.



Ejemplo

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{18}} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \leftarrow \boxed{\text{Fracción irreducible}}$$

Observa que hemos dividido dos veces, primero por 2 y después por 3, ambos divisores comunes de 12 y 18.

- Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por el mismo número.
- Una fracción que no se puede simplificar se dice que es **irreducible.**

Observa, también, que la simplificación anterior se podía realizar de una sola vez, dividiendo el numerador y el denominador por 6, que es el máximo común divisor de 12 y 18:

$$\text{máx.c.d. } (12, 18) = 6 \rightarrow \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{18}} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \leftarrow \boxed{\text{Fracción irreducible}}$$

En la web Practica calculando fracciones irreducibles.

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno, completa y observa que se obtiene siempre el mismo resultado.

$\frac{3}{2} = 3:2 = \square$

$\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{\square}{\square} = \square : \square = \square$

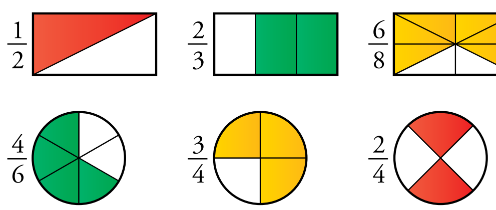
$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\square}{\square} = \square : \square = \square$

2. Copia en tu cuaderno y completa para obtener fracciones equivalentes.

a) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{5 \cdot 3} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{18}{30} = \frac{18:2}{30:\square} = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{18}{30} = \frac{18:\square}{30:3} = \frac{\square}{\square}$

3. Busca, entre las siguientes, tres pares de fracciones equivalentes:



4. Escribe, en cada caso, dos fracciones equivalentes:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{15}{20}$ d) $\frac{18}{24}$

5. Simplifica.

a) $\frac{15}{20} \rightarrow$ dividiendo entre 5.

b) $\frac{20}{30} \rightarrow$ dividiendo entre 2 y, después, entre 5.

6. Simplifica estas fracciones:

a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{9}{12}$

e) $\frac{10}{18}$ f) $\frac{21}{28}$ g) $\frac{33}{22}$ h) $\frac{13}{26}$

7. Simplifica, paso a paso.

a) $\frac{12}{30}$ b) $\frac{18}{27}$ c) $\frac{16}{24}$ d) $\frac{30}{75}$

8. Simplifica, dividiendo el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos.

a) $\frac{9}{18}$ b) $\frac{30}{40}$ c) $\frac{30}{18}$ d) $\frac{16}{80}$

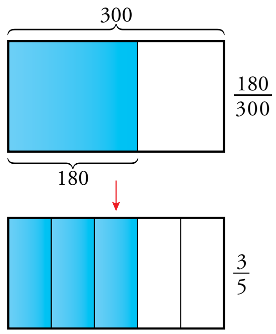
9. Calcula, en cada caso, la fracción irreducible:

a) $\frac{8}{20}$ b) $\frac{36}{24}$ c) $\frac{42}{70}$ d) $\frac{90}{108}$

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Algunos problemas con fracciones

Estudia detenidamente los procesos seguidos en los problemas que vienen a continuación. Te servirán para resolver otros muchos problemas con fracciones.



■ CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

Alberto tiene 180 de los 300 cromos de la colección que empezó el trimestre pasado. ¿Qué parte de la colección ha reunido hasta ahora?

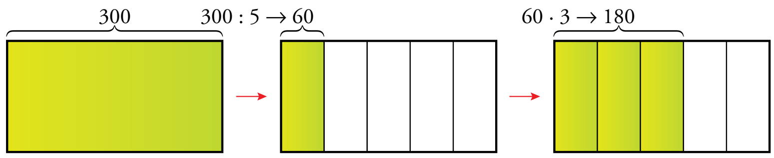
$$\left.\begin{array}{l}\text{TIENE} \rightarrow 180 \\ \text{TOTAL} \rightarrow 300\end{array}\right\} \text{FRACCIÓN REUNIDA} \rightarrow \frac{180}{300}$$

Simplificamos, primero entre 10 y después entre 6: $\frac{180}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Solución: Alberto ha reunido las tres quintas partes $\left(\frac{3}{5}\right)$ de la colección.

■ FRACCIÓN DE UN NÚMERO: PROBLEMA DIRECTO

Alberto empezó el trimestre pasado una colección de 300 cromos y ya ha reunido las tres quintas partes. ¿Cuántos cromos tiene?

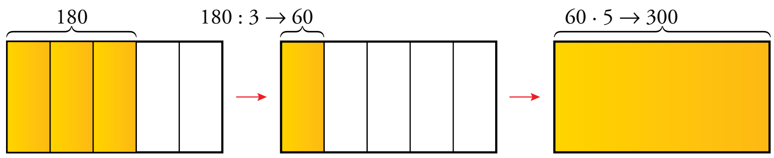


$$\frac{3}{5} \text{ de } 300 = (300 : 5) \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$$

Solución: Alberto tiene 180 cromos.

■ FRACCIÓN DE UN NÚMERO: PROBLEMA INVERSO

Alberto ha reunido 180 cromos de la colección que empezó a hacer el trimestre pasado, y eso supone las tres quintas partes del total. ¿Cuántos cromos forman la colección completa?



$\frac{3}{5}$ del total = 180 $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ del total = 180 : 3 = 60 $\rightarrow$ $\frac{5}{5}$ del total = 60 · 5 = 300

Solución: La colección tiene, en total, 300 cromos.

En la web

Resuelve problemas usando fracciones.

En la práctica

$$\frac{3}{5} \text{ de } x = 180$$
$$\downarrow$$
$$x = (180 : 3) \cdot 5$$

Se divide entre el numerador y se multiplica por el denominador.

Piensa y practica

1. De un pinar destinado a la producción de madera, con una población estimada de 3 400 árboles, se van a talar las tres cuartas partes.

¿Cuántos árboles se van a talar?

2. Se van a talar 2 550 árboles en un pinar destinado a la producción de madera, lo que supone las tres cuartas partes del total.

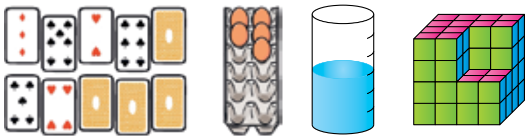
¿Cuántos árboles hay en total?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Significado de las fracciones

1. Observa y representa con una fracción.



a) La parte de las cartas que están del revés.

b) La parte de la huevera que se ha usado ya.

c) La parte ocupada del depósito.

d) La parte que le falta al cubo.

2. La tabla siguiente muestra datos de mi clase:

	APRUEBAN TODO	NO APRUEBAN TODO
CHICOS	8	5
CHICAS	11	5

a) ¿Qué fracción de la clase ocupan las chicas?

b) ¿Qué fracción de la clase aprueba todo?

c) ¿Qué fracción de la clase abarca a los chicos que aprueban todo?

d) ¿Qué fracción de las chicas no aprueban todo?

e) ¿Qué grupo, en conjunto, obtiene mejores resultados, el de los chicos o el de las chicas?

La fracción de un número

3. Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{3}$ de 9 b) $\frac{4}{5}$ de 20 c) $\frac{3}{4}$ de 80

d) $\frac{2}{7}$ de 14 e) $\frac{5}{6}$ de 60 f) $\frac{5}{8}$ de 400

4. Calcula.

a) $\frac{2}{3}$ de 192 b) $\frac{4}{5}$ de 375 c) $\frac{3}{7}$ de 749

d) $\frac{3}{4}$ de 332 e) $\frac{5}{8}$ de 1 096 f) $\frac{4}{9}$ de 153

5. Copia, calcula mentalmente y completa.

a) Los $\frac{3}{4}$ de … valen 15. b) Los $\frac{2}{3}$ de … valen 40.

c) Los $\frac{4}{5}$ de … valen 20. d) Los $\frac{3}{5}$ de … valen 9.

Fracciones equivalentes

6. Escribe tres fracciones equivalentes a 7/21 que tengan por denominador 3, 6 y 30, respectivamente.

7. Obtén la fracción irreducible.

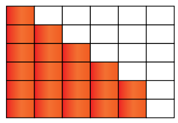
a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{10}{14}$ c) $\frac{5}{15}$

d) $\frac{18}{22}$ e) $\frac{5}{25}$ f) $\frac{6}{27}$

g) $\frac{21}{28}$ h) $\frac{22}{33}$ i) $\frac{30}{45}$

j) $\frac{20}{60}$ k) $\frac{56}{80}$ l) $\frac{165}{330}$

8. ¿Qué fracciones expresan la parte coloreada?



a) $\frac{10}{18}$ b) $\frac{15}{30}$ c) $\frac{20}{36}$

d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{12}{25}$ f) $\frac{36}{20}$

9. ¿Qué parte del día ha transcurrido a las ocho en punto de la mañana? ¿Y a las ocho en punto de la tarde? Responde con fracciones irreducibles.

10. ¿Verdadero o falso?

a) Tres hacen un tercio de docena.

b) Setenta y cinco centésimas hacen tres cuartos de unidad.

c) Tres décimas hacen seis veinteavos de unidad.

d) Diez minutos hacen un quinto de hora.

e) Doce segundos hacen un quinto de minuto.

11. Estas son las notas de los 25 estudiantes de una clase en un control de Ciencias Sociales:

6,25; 5; 8; 7,5; 5,25; 5; 1,75; 6,75; 4,5; 5,5; 5,5; 6; 6,25; 8,25; 3,75; 3,25; 9,75; 6,75; 6; 5; 7,75; 8,25; 10; 4,25; 6,25

a) ¿Qué fracción de la clase ha aprobado?

b) ¿Qué fracción ha suspendido?

Responde con fracciones irreducibles.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Resuelve problemas

12. Laura tiene, amontonadas, 10 bolas rojas y 6 bolas verdes.

a) ¿Cuántas bolas rojas habría que añadir al montón para que fueran los tres cuartos del conjunto?

b) ¿Cuántas habría que quitar para que fueran solo la cuarta parte?

13. Un cliente compra la cuarta parte de un queso que pesa dos kilos.

a) ¿Qué fracción de queso queda?

b) ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

14. Con un bidón de 20 litros, se llenan 30 botellas de agua. ¿Qué fracción de litro entra en cada botella?

15. Un kilo de fresas cuesta 2,80 €. ¿Cuánto pagarás por tres cuartos de kilo?

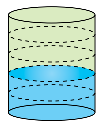
16. Las dos quintas partes de las 460 ovejas de un rebaño han tenido esta primavera un corderito. ¿Cuántos corderos ha dado el rebaño esta primavera?

17. En una parcela de 800 m^2, se ha construido una casa que ocupa 2/5 del terreno y el resto se ha ajardinado. ¿Qué superficie ocupa la casa? ¿Y el jardín?

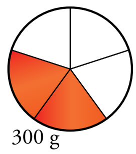
18. Un empleado, que gana 1 200 € al mes, ingresa tres veinteavos del sueldo en una cuenta de ahorro. ¿Cuánto ahorra cada mes?

19. Julia compró un queso de 2 kilos y 800 gramos, pero ya ha consumido dos quintos. ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

20. En este bidón hay 12 litros de agua. ¿Cuántos litros caben en total en el bidón?



21. He comprado 2/5 de una empanada que han pesado 300 gramos. ¿Cuánto pesaba la empanada completa?



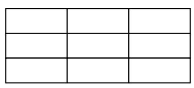
300 g

22. Se han sembrado de alfalfa los 4/5 de la superficie de una finca, y aún quedan 600 metros cuadrados sin sembrar. ¿Cuál es la superficie total de la finca?

Autoevaluación

1. ¿Qué fracción de hora son 12 minutos?

2. Represента en tu cuaderno, en gráficos como el que tienes a continuación o en otros que tú decidas, las fracciones 8/9 y 15/9.



3. En un concurso oposición aprueban 15 candidatos y suspenden 35. ¿Qué fracción de los opositores ha aprobado?

4. Calcula.

a) Tres cuartos de 240

b) $\frac{2}{5}$ de 80

c) $\frac{3}{3}$ de 35

d) Tres medios de 10

5. Escribe.

a) Una fracción equivalente a $\frac{6}{21}$ que tenga por denominador 14.

b) Una fracción equivalente a $\frac{9}{15}$ que tenga por denominador 10.

6. Simplifica.

a) $\frac{14}{28}$ b) $\frac{36}{48}$ c) $\frac{40}{60}$

7. Ana y Rosa han comprado un bolígrafo cada una. Ana ha gastado 4/5 de euro, y Rosa, 75 céntimos. ¿Cuál de los dos bolígrafos ha salido más caro?

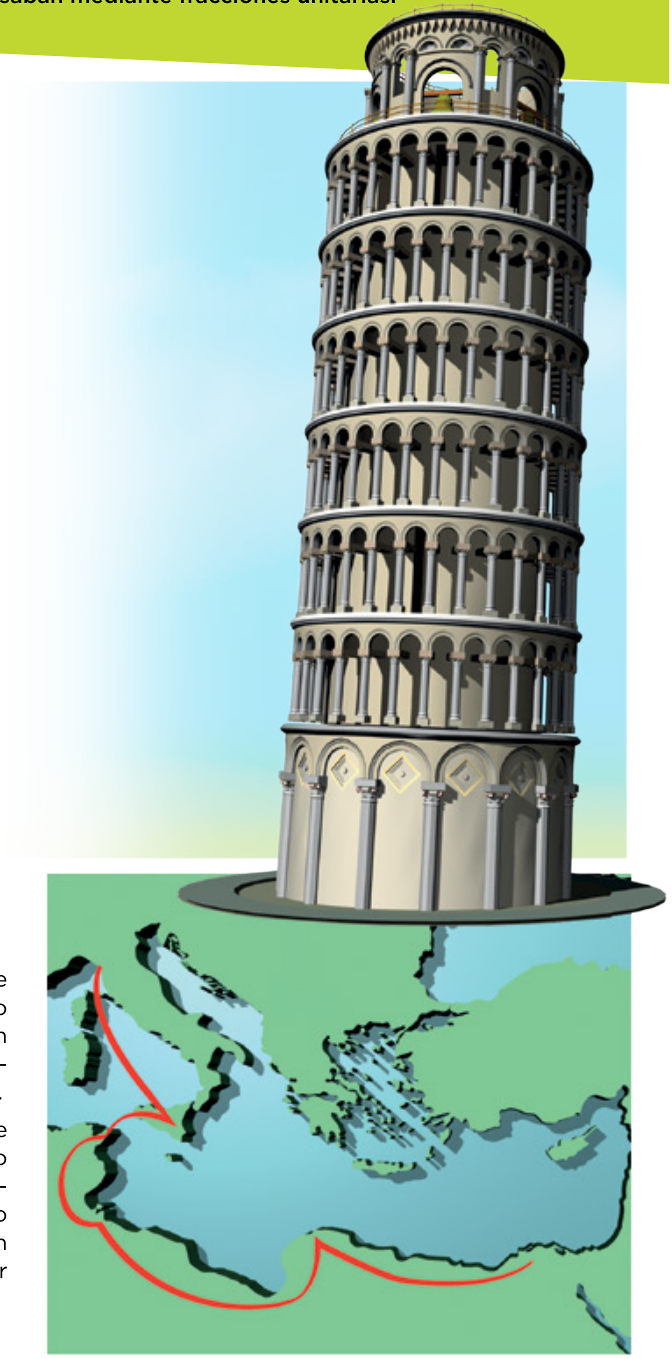
8. En una de las estanterías de la biblioteca hay 300 libros. Las cinco sextas partes son novelas.

¿Cuántas novelas hay en la estantería?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

8 Operaciones con fracciones

Los griegos tomaron de los egipcios el uso de las fracciones unitarias. Hacia el siglo IV a. C. empezaron a utilizar fracciones ordinarias, aunque el resultado de sus operaciones lo expresaban mediante fracciones unitarias.



Este uso mixto de los dos tipos de fracciones se mantuvo hasta el siglo XII. El matemático italiano **Fibonacci** manejó con soltura las ordinarias, pero en sus libros seguía dedicando tiempo y esfuerzo al manejo de las unitarias, porque sus lectores las preferían.

El verdadero nombre de Fibonacci era Leonardo de Pisa. Acompañó a su padre Bonaccio (Fi-bonacci, hijo de Bonaccio) en sus numerosos viajes que, como mercader, realizó por el norte de África. Fibonacci tuvo maestros musulmanes y de ellos aprendió, con gran provecho, la matemática árabe, que ayudó a introducir en Europa.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

1 Reducción a común denominador

Algunas operaciones con fracciones (comparar, sumar…) resultan más sencillas cuando las fracciones tienen denominadores iguales. Por ejemplo:

— Ordenar $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ y $\frac{5}{7}$ es obvio $\rightarrow$ $\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

— Sin embargo, ordenar $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{6}$ no es tan sencillo a simple vista. Se hace necesario reducir a común denominador.

Reducir fracciones a común denominador es sustituirlas por otras equivalentes con el mismo denominador.

Ejemplo

Vamos a reducir a común denominador $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{12}$.

mín.c.m. (8, 4, 12) = 24

$$\frac{5}{8} \rightarrow \boxed{24 : 8 = 3} \rightarrow \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} \rightarrow \frac{15}{24}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{24 : 4 = 6} \rightarrow \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} \rightarrow \frac{18}{24}$$

$$\frac{7}{12} \rightarrow \boxed{24 : 12 = 2} \rightarrow \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} \rightarrow \frac{14}{24}$$

Método para reducir fracciones a común denominador

Fíjate en el ejemplo del margen mientras sigues el proceso que se expone a continuación.

Para reducir fracciones a común denominador

- Calcula el mínimo común múltiplo, m, de los denominadores.
- Transforma cada fracción en otra equivalente que tenga por denominador m.

  Para ello, se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir m entre el denominador.

Piensa y practica

1. Ejercicio resuelto

Reducir a común denominador $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$, poniendo de denominador común 12.

$$12 : 4 = 3 \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$12 : 6 = 2 \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

2. Reduce al denominador común que se indica.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (denominador común 6)

b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ (denominador común 6)

c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ (denominador común 10)

d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ (denominador común 12)

e) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ (denominador común 12)

f) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ (denominador común 8)

3. Reduce a denominador común.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

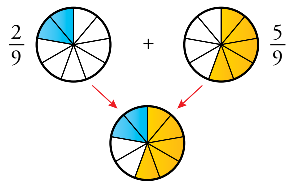
b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$

c) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{20}$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

2 Suma y resta de fracciones



$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$

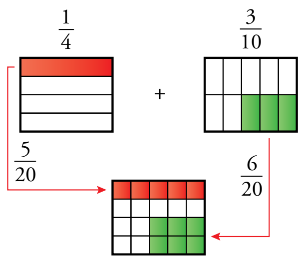
Suma y resta de fracciones con igual denominador

Sumar y restar fracciones con igual denominador resulta muy sencillo.

Ejemplos

- $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$
- $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Veamos a continuación otros casos que se pueden presentar.



$\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=\frac{11}{20}$

Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Cuando las fracciones tienen denominadores diferentes, las reduciremos, primero, a común denominador.

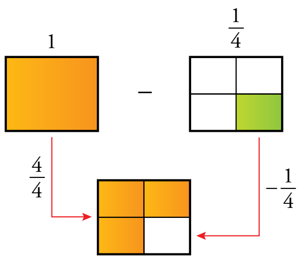
Ejemplos

a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(4,10)=20\\ \text{Tomamos 20 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{3\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{5}{20}+\frac{6}{20}=\frac{5+6}{20}=\frac{11}{20}$$

b) $\frac{2}{3}-\frac{7}{15}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(3,15)=15\\ \text{Tomamos 15 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{7}{15}=\frac{10}{15}-\frac{7}{15}=\frac{10-7}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$



$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Suma y resta de fracciones con números enteros

Si alguno de los sumandos es un número entero, se le trata como una fracción con denominador la unidad.

Ejemplo

$2-\frac{7}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2}{1}-\frac{7}{3}+\frac{5}{6}=\begin{cases}\text{Cambianos 2 por la fracción } \frac{2}{1}.\\ \text{mín.c.m.}\,(1,3,6)=6\\ \text{Tomamos 6 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{2\cdot 6}{1\cdot 6}-\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{5}{6}=\frac{12}{6}-\frac{14}{6}+\frac{5}{6}=\frac{12-14+5}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Observa que en las operaciones con fracciones, se deben simplificar siempre los resultados, entregando una fracción irreducible.

Ejemplo

$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(3,5,10)=30\\ \text{Tomamos 30 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{10}{30}+\frac{24}{30}-\frac{9}{30}=$$

$$=\frac{10+24-9}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

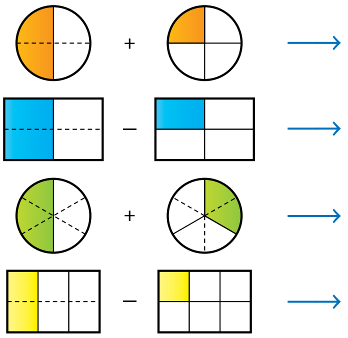
En la web

Practica la suma y la resta de fracciones.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Piensa y practica

1. Observa y calcula mentalmente.



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

2. Calcula, reduciendo primero a común denominador.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{6}+\frac{7}{8}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}$ h) $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}$

i) $\frac{5}{12}+\frac{1}{6}$ j) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$

3. Opera y simplifica los resultados.

a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$

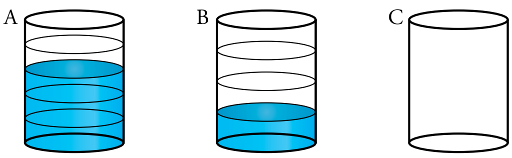
c) $\frac{3}{10}+\frac{8}{15}$ d) $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{20}$ f) $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$

g) $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}$ h) $\frac{13}{18}-\frac{1}{6}$

i) $\frac{5}{8}+\frac{1}{24}$ j) $\frac{13}{15}-\frac{7}{10}$

4. Los recipientes A, B y C son iguales.



a) ¿Qué fracción de C se ocuparía al verter sobre él los contenidos de A y B?

b) ¿Qué fracción le faltaría para estar completo?

5. Transforma cada entero en una fracción de denominador la unidad y opera:

a) $1+\frac{1}{5}$ b) $1-\frac{3}{5}$

c) $2+\frac{2}{7}$ d) $2-\frac{5}{3}$

6. Calcula.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$

c) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-1$

e) $\frac{7}{4}-\frac{5}{8}-\frac{2}{3}$ f) $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-2$

g) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$ h) $\frac{3}{5}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$

7. Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

e) $1-\frac{3}{10}-\frac{8}{15}$ f) $1-\frac{4}{15}-\frac{2}{5}$

g) $\frac{5}{2}-2+\frac{1}{10}$ h) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}-\frac{1}{3}$ j) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

8. Nuria ha gastado 3/4 del dinero que tenía en un libro y 1/5 en un refresco. ¿Qué parte del dinero ha gastado? ¿Qué parte le queda?

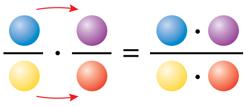
9. La cuarta parte de la producción de un viñedo es uva de mesa, los 5/8 se destinan a la producción de vino y el resto se envía a la fábrica de zumos. ¿Qué parte de la producción va a la fábrica de zumos?

10. Con una botella que contiene dos litros de agua, se llenan dos vasos de cuarto de litro y un botellín de un tercio de litro. ¿Qué fracción de litro queda en la botella?

11. Un embalse estaba lleno a finales de primavera. Durante el verano pierde 7/8 de su capacidad, y durante el otoño recupera 2/5 de la misma. ¿Qué fracción del embalse está llena cuando empieza el invierno?

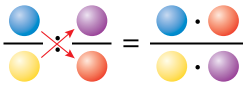
© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

3 Multiplicación y división de fracciones



Para multiplicar fracciones:
- Se multiplican los numeradores.
- Se multiplican los denominadores.

$\rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$



Para dividir dos fracciones, se multiplican los términos cruzados. $\rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Piensa y practica

1. Calcula y, si es posible, simplifica.

a) $5 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4} \cdot 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot 2$ d) $(-5) \cdot \frac{3}{10}$

e) $6 \cdot \frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4} \cdot (-4)$

2. Multiplica y, si es posible, simplifica.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11}$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{15}$ f) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}$

g) $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}$ h) $\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5}$

i) $\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{18}$ j) $\frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$

3. Expresa con una fracción.

a) El triple de dos séptimos.

b) La mitad de la mitad.

c) La mitad de un cuarto.

d) La cuarta parte de un tercio.

e) Un tercio de tres cuartos.

4. Luis avanza $\frac{3}{4}$ de metro con cada paso. ¿Cuántos metros avanza con mil pasos?

5. Un bote de refresco de naranja contiene un tercio de litro.

¿Cuántos litros se necesitan para llenar 60 botes?

6. Divide y, si es posible, simplifica.

a) $5 : \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} : 5$ c) $\frac{3}{2} : 6$

d) $7 : \frac{14}{3}$ e) $\frac{2}{5} : 3$ f) $5 : \frac{10}{3}$

7. Divide.

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7} : \frac{5}{2}$ e) $\frac{2}{11} : \frac{1}{5}$ f) $\frac{7}{4} : \frac{5}{3}$

8. Un clavo penetra 3/4 de centímetro con cada martillazo. ¿Cuántos golpes de martillo se necesitan para que penetre 6 centímetros?

9. Con 3/4 de kilo de café se han llenado 5 bolsas. ¿Qué fracción de kilo contiene cada una?

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

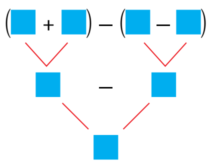
4 Operaciones combinadas

Recuerda que, en las expresiones con paréntesis y operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Teniendo esto en cuenta, analiza los ejercicios resueltos y aplica los mismos procesos en las actividades que se te proponen debajo.

Ejercicios resueltos



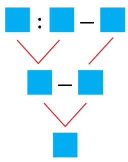
1. ***Calcular*** $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

a) Podemos operar, primero, dentro de los paréntesis:

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{15}\right)-\left(\frac{5}{10}-\frac{2}{10}\right)=\frac{11}{15}-\frac{3}{10}=\frac{22-9}{30}=\frac{13}{30}$$

b) O quitar, primero, los paréntesis:

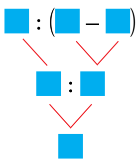
$$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{12}{30}+\frac{10}{30}-\frac{15}{30}+\frac{6}{30}=\frac{28-15}{30}=$$
$$=\frac{13}{30}$$



2. ***Calcular*** $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$.

Resolvemos, primero, la división. Después, la resta:

$$\frac{2}{5}:\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$



3. ***Calcular*** $\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)$.

Comenzamos operando dentro del paréntesis:

$$\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)=\frac{2}{5}:\left(\frac{5}{10}-\frac{3}{10}\right)=\frac{2}{5}:\frac{2}{10}=\frac{\cancel{2}\cdot 10}{5\cdot\cancel{2}}=\frac{10}{5}=2$$

En la web Practica resolviendo operaciones combinadas con fracciones.

Piensa y practica

1. Calcula.

a) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{3}{5}-\left(1-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{6}$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{8}{15}$

e) $\left(1+\frac{2}{7}\right)+\left(2-\frac{10}{7}\right)$

f) $\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$

g) $\left(3-\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{5}{4}-1\right)$

h) $\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right)$

2. Opera.

a) $\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{5}{6}\right)$

c) $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{6}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$

e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}$

f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}$

g) $\frac{3}{5}-\frac{1}{6}:\frac{1}{2}$

h) $\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{2}$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

5 Algunos problemas con fracciones

Analiza los problemas siguientes, observa sus diferencias y reflexiona sobre los procesos seguidos en su resolución. Te ayudarán en muchos problemas con fracciones.

En la web
Practica la resolución de problemas haciendo uso de las fracciones.

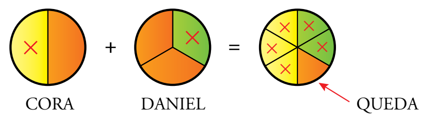
En la web
Resuelve un problema haciendo uso de las fracciones.

Suma de fracciones

Problema resuelto

Cora y Daniel entran en un restaurante italiano y piden una pizza. Cora toma la mitad y Daniel la tercera parte.

¿Qué fracción de pizza queda?



TOMAN $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ QUEDA $\rightarrow \frac{1}{6}$

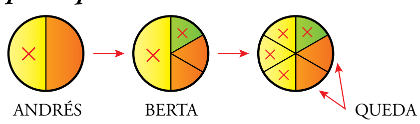
Solución: Han consumido $\frac{5}{6}$ de pizza y queda $\frac{1}{6}$.

Fracción de otra fracción

Problema resuelto

Andrés y Berta piden otra pizza en el mismo restaurante. Andrés toma la mitad, y Berta, la tercera parte del resto.

¿Qué fracción de pizza queda?



ANDRÉS: Toma $\rightarrow \frac{1}{2}$ Queda $\rightarrow \frac{1}{2}$

BERTA: Toma $\rightarrow \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ Queda $\rightarrow \frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

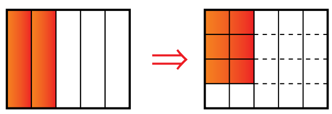
Solución: Han consumido $\frac{4}{6}$ de pizza y quedan $\frac{2}{6}$ (simplifica estos resultados).

Ten en cuenta

Para calcular la fracción de otra fracción, se multiplican ambas fracciones.

Por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$



$\frac{2}{5} \longrightarrow \frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

Piensa y practica

1. Un hortelano vende 2/3 de su producción de tomate a una conservera y 1/5 a una tienda de verduras. ¿Qué parte de la producción de tomate ha vendido?

2. El mismo hortelano vende 2/3 de sus melones a un supermercado y 1/5 del resto a un vendedor ambulante. ¿Qué fracción de los melones ha vendido?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Operaciones con fracciones

Suma y resta

1. Calcula mentalmente.

a) $1-\frac{1}{2}$ b) $1-\frac{1}{4}$ c) $1-\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

2. Realiza estas sumas y restas:

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{8}+\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{14}$

3. Opera.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\frac{25}{27}$

c) $2-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}$ f) $\frac{8}{5}-1+\frac{13}{15}$

g) $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$ h) $\frac{5}{9}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

Multiplicación y división

4. Calcula y simplifica.

a) $4\cdot\frac{1}{8}$ b) $6\cdot\frac{5}{12}$ c) $\frac{4}{3}\cdot 9$

d) $3\cdot\frac{2}{15}$ e) $\frac{5}{6}\cdot 12$ f) $\frac{4}{9}\cdot 3$

5. Multiplica y reduce.

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$ c) $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}$ d) $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}$

e) $\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{12}$ f) $\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{15}$ g) $\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}$ h) $\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{16}$

6. Calcula y reduce.

a) $1:\frac{5}{6}$ b) $1:\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{3}:3$

d) $5:\frac{3}{4}$ e) $3:\frac{6}{5}$ f) $\frac{4}{5}:8$

7. Divide y simplifica.

a) $\frac{2}{5}:\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}:\frac{2}{6}$ c) $\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ f) $\frac{15}{12}:\frac{3}{10}$ g) $\frac{5}{3}:\frac{1}{6}$ h) $\frac{2}{7}:\frac{6}{14}$

Operaciones combinadas

8. Calcula.

a) $\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)$ b) $\frac{3}{5}-\left(1-\frac{7}{10}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(1-\frac{1}{5}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)$

e) $\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$

g) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{5}\right)$ h) $\left(3-\frac{5}{3}\right)-\left(2-\frac{7}{5}\right)$

9. Calcula.

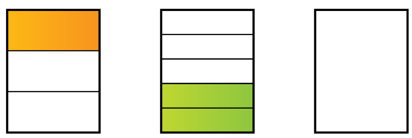
a) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

c) $2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)$ d) $\frac{1}{10}:\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)$

e) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)$ f) $\frac{7}{9}:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)$

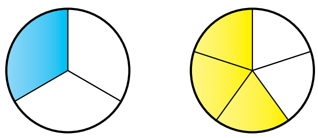
Reflexiona y resuelve

10. Observa estos rectángulos:



Si recortas la parte coloreada de los dos primeros y las colocas sobre el tercero, ¿qué parte del rectángulo quedará cubierta?

11. Si recortas en el primer círculo la porción coloreada de azul y la colocas en el segundo, sobre la parte amarilla, ¿qué porción de círculo se verá en amarillo?



© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

12. Arancha abre una botella de aceite de 3/4 de litro y retira un vaso de 2/5 de litro para la receta de un gazpacho. ¿Cuánto aceite queda en la botella?

13. Un barco pesquero entra a puerto con la bodega llena. Los dos tercios de la carga son de merluza; la cuarta parte, de boquerón, y el resto, de calamar. ¿Qué fracción de la carga corresponde al calamar?

14. Una vuelta ciclista consta de cuatro etapas. La primera abarca la sexta parte del recorrido; la segunda, la tercera parte, y la tercera, los dos novenos. ¿Qué parte del recorrido abarca la última etapa?

15. ¿Cuántos kilos de mermelada se necesitan para llenar 2 500 botes de 3/5 de kilo?

16. ¿Cuántos litros de perfume se necesitan para llenar 100 frasquitos de 3/20 de litro?

17. Una industria conservera envasa 1 500 kilos de mermelada de frambuesa en botes de 3/5 de kilo. ¿Cuántos botes se llenan?

18. ¿Cuántos frascos de perfume de 3/20 de litro se llenan con un bidón de 15 litros?

19. Ana, Loli y Mar han comprado un queso por 32 €. Ana se queda con la mitad; Loli, con la cuarta parte, y Mar, con el resto.

a) ¿Qué fracción de queso se lleva Mar?

b) ¿Cuánto debe pagar Mar por su parte?

20. Ana, Loli y Mar han comprado un queso. Ana se queda con la mitad; Loli, con la cuarta parte, y Mar, con el resto. Sabiendo que Mar, por su porción, ha puesto 8 euros, ¿cuánto costó el queso?

21. Juan compró ayer una tarta y comió 2/5. Hoy ha comido la mitad del resto. Si el trozo que queda pesa 300 gramos, ¿cuál era el peso de la tarta entera?

Autoevaluación

1. Reduce a común denominador: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{13}{18}$

2. Calcula.

a) $\frac{1}{2} - \frac{13}{18} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} - 1$

3. Calcula y simplifica.

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10}$ b) $\frac{7}{15} : \frac{7}{9}$

4. Resuelve y da cada resultado con una fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3} : \left(\frac{3}{10} \cdot 5\right)$ b) $10 : \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{5}\right)$

5. Resuelve.

a) $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(1 - \frac{5}{6}\right)$

6. En casa de Raquel compran una tarta. Al mediodía consumen la mitad de la tarta, y en la cena, la tercera parte.

¿Qué porción de tarta han consumido?

¿Qué porción queda?

7. Un embalse estaba lleno a finales del mes de mayo. En el mes de junio se consumieron 3/10 de sus reservas y a finales de julio solo quedaba la mitad. ¿Qué fracción del embalse se consumió durante el mes de julio?

8. Una furgoneta de reparto carga en el almacén 40 cajas de aceite. Cada caja contiene 12 botellas de tres cuartos de litro. ¿Cuántos litros de aceite van en la furgoneta?

9. Un frasco de agua de colonia tiene una capacidad de tres quinceavos de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón de diez litros?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

9 Proporcionalidad y porcentajes

Los matemáticos de los pueblos antiguos, como los egipcios o los babilonios, se ocuparon de resolver problemas prácticos, entre ellos los de proporcionalidad (repartos, herencias...).

Sin embargo, los griegos, especialmente los de la escuela de Pitágoras, avanzaron investigando en aspectos más teóricos. Y en ese empeño, descubrieron curiosas relaciones de la proporcionalidad con la música.

Como sabes, la escala musical consta de siete notas: *do, re, mi, fa, sol, la* y *si*. La octava nota vuelve a ser un *do*, repitiéndose la serie anterior. Y al intervalo entre dos notas con el mismo nombre se le llama *octava*.

Pues bien, los pitagóricos apreciaron que si dos cuerdas tensas cuyas longitudes están en relación 1:2 se hacen vibrar, sus sonidos marcan una octava. Y que si sus longitudes están en una proporción sencilla (2:3, 3:4, 5:6...), sus sonidos son armoniosos, suenan bien.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

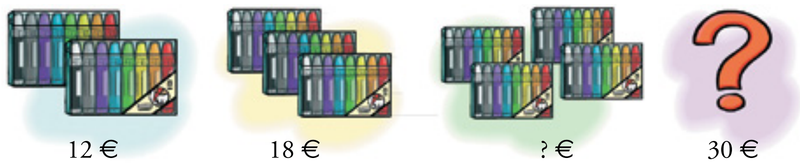
1 Relación de proporcionalidad entre magnitudes

Como ya sabes, llamamos magnitud a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, la longitud, el peso o el precio son magnitudes. A veces, entre las magnitudes se dan relaciones muy útiles para la resolución de problemas, como la relación de proporcionalidad que vas a estudiar ahora en sus dos modalidades: directa e inversa.

? €

Relación de proporcionalidad directa

Observa la ilustración y calcula mentalmente los datos que faltan.



Aquí aparecen dos magnitudes, el número de cajas de rotuladores y el coste (euros). Podemos construir una tabla con los valores correspondientes:

· 5

N.º DE CAJAS	1	2	3	4	5	6
COSTE (EUROS)	6	12	18	24	30	36

· 5

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, lo que nos permite completar la tabla. Diremos que esa relación es de proporcionalidad directa.

En la web
Practica la relación de proporcionalidad directa.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se divide de la misma forma (mitad, tercio, …).

Piensa y practica

1. ¿Son directamente proporcionales estas magnitudes?:

a) El peso de una sandía que compras y su precio.

b) Volumen de aceite y su peso.

c) El precio de una entrada de cine y el tiempo que dura la película.

d) La edad de una persona y su altura.

e) El peso que cuelga de un muelle y la longitud que lo alarga.

f) La distancia que recorre un coche y el número de vueltas que da una rueda.

g) El precio de un libro y su número de páginas.

2. Copia y completa la tabla que hace corresponder el número de terrones de azúcar y su peso en gramos.

N.º DE TERRONES	1	2	3	4	5	10	20
PESO (GRAMOS)	5	10					

¿Es de proporcionalidad directa? En caso afirmativo, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

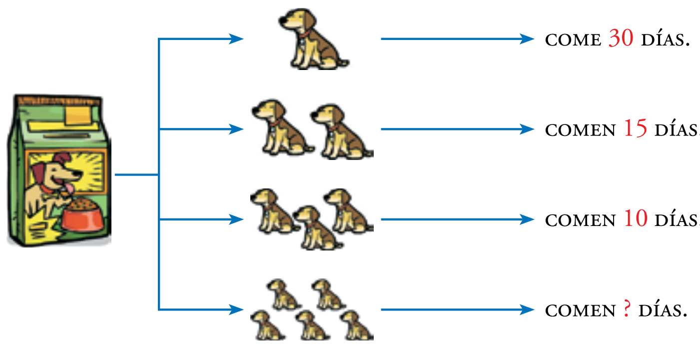
3. Copia y completa la tabla que relaciona el tiempo que está abierto un grifo con la cantidad de agua que arroja.

SEGUNDOS	1	2	3	4	5	10	20
LITROS	0,2	0,4					

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Relación de proporcionalidad inversa

Reflexiona, ahora, sobre las cuentas que hacen en una protectora de animales, relacionando lo que dura un saco de pienso según el número de perros que haya que alimentar.



Observa que cuantos *más* perros hay que alimentar *menos* dura el saco de pienso; y cuantos *menos* sean los perros *más* dura el saco.

La relación existente entre las dos magnitudes (el número de perros y el número de días que dura el saco) nos permite completar la tabla siguiente:

· 5

N.° DE PERROS	1	2	3	5	6
N.° DE DÍAS	30	15	10	6	5

: 5

Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

En la web

Practica identificando relaciones de proporcionalidad.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), se divide la otra (mitad, tercio, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se multiplica (doble, triple, …).

Piensa y practica

4. ¿Son inversamente proporcionales estas magnitudes?:

a) El peso de una persona y el número de personas que entran en un ascensor.

b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir cierta distancia.

c) El número de vacunas vendidas contra la gripe y el número de personas que contraen la enfermedad.

d) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.

e) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.

5. Una cuadrilla de limpieza, de cuatro operarios, limpia un edificio de oficinas en cinco horas.

Copia y completa en tu cuaderno la tabla con los tiempos que tardaría la cuadrilla en hacer el mismo trabajo si tuviera distintos números de trabajadores.

: 4

N.° DE OPERARIOS	1	2	4	5	10
TIEMPO (HORAS)	20		5		

· 4

¿Qué relación existe entre las dos magnitudes consideradas? Justifica tu respuesta.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

2 Problemas de proporcionalidad directa

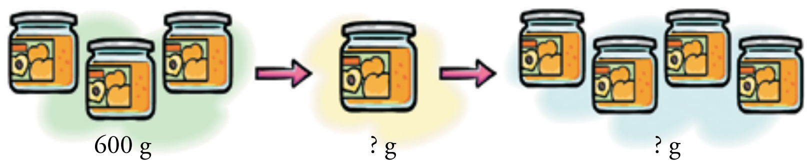
De las relaciones de proporcionalidad se derivan herramientas que facilitan la resolución de algunos tipos de problemas aritméticos. Esas herramientas se concretan en dos métodos de resolución: la reducción a la unidad y la regla de tres.

Método de reducción a la unidad

Ejemplo

Tres botes de mermelada pesan 600 gramos. ¿Cuánto pesan cuatro botes?

Para resolver la pregunta, primero calcularemos el peso de un bote:



MAGNITUDES

	N.º DE BOTES		PESO (g)		
	3	→	600		
REDUCCIÓN A LA UNIDAD →	1	→	?	→	600 : 3 = 200 g
	4	→	?	→	200 · 4 = 800 g

Solución: Cuatro botes pesan 800 gramos.

Método de reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

Conociendo ese valor, es fácil completar cualquier par de valores correspondientes.

Problema resuelto

Tres botes de mermelada cuestan 5,40 €. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

NÚMERO DE BOTES		COSTE (€)
3	→	5,40
1	→	5,40 : 3 = 1,80 €
4	→	1,80 · 4 = 7,20 €

Solución: Cuatro botes cuestan 7,20 €.

Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales

Tomemos la tabla de valores del ejemplo anterior, que relaciona el número de botes de mermelada con su peso.

Observa que con dos pares de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes. La igualdad de esas dos fracciones se llaman **proporción.**

NÚMERO DE BOTES	PESO (GRAMOS)
1	200
2	400
3	600
4	800

$$\frac{1}{2} = \frac{200}{400} \iff \underbrace{1 \cdot 400}_{400} = \underbrace{2 \cdot 200}_{400}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{600}{800} \iff \underbrace{3 \cdot 800}_{2\,400} = \underbrace{4 \cdot 600}_{2\,400}$$

Comprueba que ocurre lo mismo con nuevos valores de la tabla.

Nos apoyaremos en esta propiedad para justificar un nuevo método para la resolución de problemas de proporcionalidad: **la regla de tres directa.**

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD 1		MAGNITUD 2
a	$\longrightarrow$	m
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

$$a \cdot x = b \cdot m \;\rightarrow\; x = \frac{b \cdot m}{a}$$

En la web

Practica resolviendo problemas de proporcionalidad directa.

Regla de tres directa

Dos pares de valores correspondientes forman dos fracciones equivalentes. Esto nos permite calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres.

Ejemplo

Tres botes de mermelada cuestan 5,40 €. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

5,40 € ? €

MAGNITUDES

N.º DE BOTES		COSTE (€)
3	$\longrightarrow$	5,40
4	$\longrightarrow$	x

Formamos dos fracciones equivalentes:

$$\frac{3}{4} = \frac{5,40}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{4 \cdot 5,40}{3} = 7,20$$

Para obtener el valor de x, recuerda el procedimiento de la página 129.

$$\frac{3}{4} = \frac{5,40}{x} \;\rightarrow\; 3 \cdot x = 4 \cdot 5,40 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \cdot 5,40}{3} = 7,20$$

Solución: Cuatro botes de mermelada cuestan 7,20 €.

Piensa y practica

1. Resuelve por reducción a la unidad.

Tres chocolatinas pesan 90 gramos. ¿Cuánto pesan 2 chocolatinas?

90 g ? g ? g

N.º CHOCOLATINAS		PESO (g)
3	$\longrightarrow$	90
1	$\longrightarrow$	?
2	$\longrightarrow$	?

2. Resuelve por reducción a la unidad.

Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuánto avanzará en 10 saltos?

3. ¿Verdadero o falso?

a) Tres barras de pan pesan 600 gramos. Dos barras pesarán 400 gramos.

b) Dos kilos de patatas han costado 0,80 €. Tres kilos costarán 1,30 €.

c) Por aparcar dos horas pago 3 €. Por aparcar media hora pago 0,75 €.

4. Calcula x en cada caso, como en el ejemplo:

- $\mathbf{\frac{4}{6} = \frac{14}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{6 \cdot 14}{4} = 21}$

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$ b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ c) $\frac{5}{6} = \frac{7}{x}$

d) $\frac{10}{12} = \frac{4}{x}$ e) $\frac{5}{3} = \frac{1}{x}$ f) $\frac{4}{6} = \frac{14}{x}$

g) $\frac{1,2}{3} = \frac{0,6}{x}$ h) $\frac{1,6}{0,8} = \frac{1}{x}$ i) $\frac{0,5}{0,6} = \frac{7,5}{x}$

5. Resuelve con una regla de tres.

He pagado 9,20 € al comprar cuatro chocolatinas. ¿Cuánto habría pagado si hubiera comprado tres?

CHOCOLATINAS		COSTE (€)
4	$\longrightarrow$	9,20
3	$\longrightarrow$	x

6. Por un gasto de 20 € te dan 3 cupones-descuento. ¿Cuántos cupones te darán por un gasto de 140 €?

7. Si 100 g de salmón ahumado cuestan 2,40 €, ¿cuánto costarán 260 g?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

3 Porcentajes

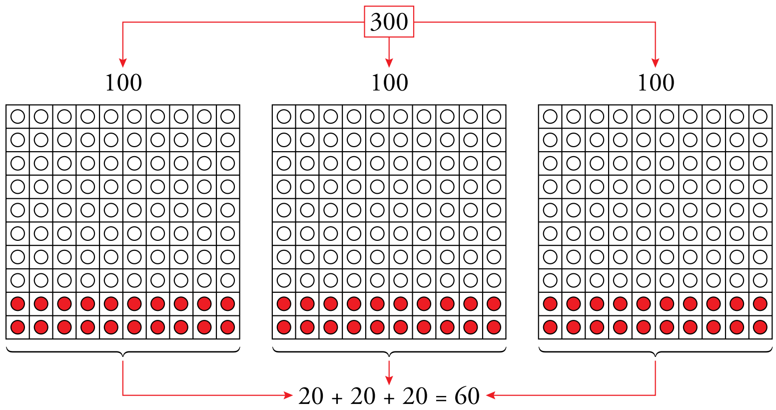
Seguramente, habrás escuchado frases como “hay un ochenta por ciento de posibilidades”, “me han hecho una rebaja del diez por ciento” o “el banco cobra un cuatro y medio por ciento”. Son expresiones muy usadas en el lenguaje corriente y, sobre todo, en el lenguaje comercial.

Concepto de tanto por ciento

Tomar un determinado tanto por ciento de un total equivale a partir el total en paquetes de cien unidades y tomar de cada paquete el tanto indicado.

Ejemplo

En un aparcamiento hay 300 coches. El 20 % son rojos. ¿Cuántos coches rojos hay?



Para calcular el 20 %, partimos el total en paquetes de 100 y tomamos 20 de cada paquete. $\}$ 300 : 100 = 3 $\rightarrow$ 3 · 20 = 60

- El símbolo % se lee **por ciento:** 20 % $\rightarrow$ veinte por ciento.
- Para calcular un determinado **tanto por ciento de una cantidad,** dividimos la cantidad entre 100 y multiplicamos por el tanto.

Ten en cuenta

a% de $N = (N : 100) \cdot a$

Ejemplo:

35 % de 240 = (240 : 100) · 35 =
= 2,4 · 35 = 84

Ejemplo

Vamos a calcular el 65% de 540:

$$65\% \text{ de } 540 = (540 : 100) \cdot 65 = 5{,}4 \cdot 65 = 351$$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios resueltos

1. ***Calcular:***

a) 12 % de 380 ***b) 40 % de 65***

a) 12 % de 380 = (380 : 100) · 12 = 3,8 · 12 = 45,6

b) 40 % de 65 = (65 : 100) · 40 = 0,65 · 40 = 26

2. ***Una tienda vende el 45 % de los 800 balones de su almacén. ¿Cuántos ha vendido?***

45 % de 800 = (800 : 100) · 45 = 8 · 45 = 360

Solución: Ha vendido 360 balones.

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente en el orden en que aparecen.

a) 30 % de 100	b) 8 % de 100
30 % de 200	8 % de 200
30 % de 300	8 % de 300
c) 15 % de 200	d) 5 % de 200
15 % de 300	5 % de 300
15 % de 400	5 % de 400

2. Calcula mentalmente.

a) 12 % de 400	b) 7 % de 300
c) 25 % de 300	d) 6 % de 800
e) 40 % de 200	f) 10 % de 500

3. Calcula con lápiz y papel.

a) 4 % de 175	b) 9 % de 1 200
c) 10 % de 820	d) 12 % de 425
e) 17 % de 560	f) 25 % de 1 480
g) 32 % de 625	h) 44 % de 10 000
i) 63 % de 830	j) 90 % de 451

4. Calcula.

a) 10 % de 30	b) 10 % de 82
c) 15 % de 40	d) 15 % de 68
e) 20 % de 50	f) 20 % de 34
g) 35 % de 80	h) 35 % de 48
i) 50 % de 24	j) 50 % de 31

5. Reflexiona y contesta.

a) El 80 % de los frutales de una huerta son manzanos, y el resto, perales. ¿Cuál es el porcentaje de perales?

b) El 92 % de los alumnos han aprobado un examen. ¿Qué porcentaje no ha aprobado?

c) El 10 % de los empleados de una empresa están de vacaciones. ¿Qué porcentaje está trabajando?

d) Si al comprar un jersey me rebajan el 15 %, ¿qué porcentaje pago?

6. El 90 % de los 430 empleados de una fábrica trabajan en turno de día. ¿Cuántos trabajan de día?

7. En una clase de 30 alumnos, el 80 % votaron a la actual delegada. ¿Cuántos votos recibió la delegada?

8. El 30 % de los 560 árboles que hay en un parque se plantaron el invierno pasado.

¿Cuántos árboles se plantaron el último invierno?

9. En el estante de los zumos de un supermercado hay 900 botellas. Un 25 % son de zumo de tomate; un 45 %, de naranja; un 20 %, de pera, y el resto, de melocotón.

¿Cuántas botellas hay de cada sabor?

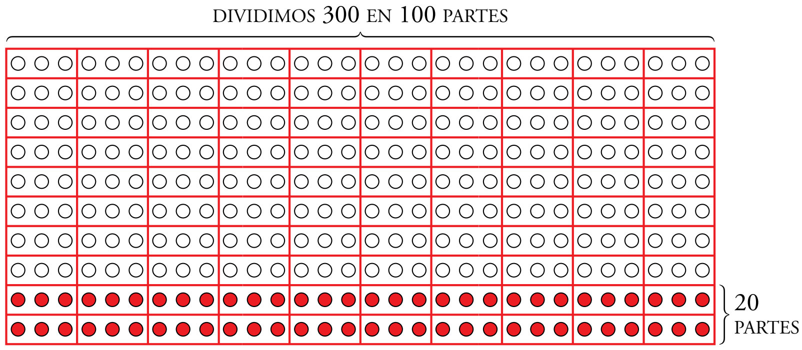
10. Una familia compra un frigorífico que cuesta 840 € pagando el 30 % al contado y el resto en 6 plazos mensuales sin recargo.

¿Cuál es el importe de cada plazo?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Un porcentajes es una fracción

Recuerda que para calcular el 20 % de una cantidad, tomábamos 20 unidades de cada 100. Pero obtenemos el mismo resultado si dividimos el total en 100 partes iguales y tomamos 20 de esas partes; esto es, si tomamos 20/100 de la cantidad.



$$\left.\begin{array}{l} 20\,\%\text{ de }300 = \\ \dfrac{20}{100}\text{ de }300 = \end{array}\right\rangle (3000 : 100) \cdot 20 = 3 \cdot 20 = 60$$

Como ves, calcular un tanto por ciento es calcular una fracción del total.

Un tanto por ciento equivale a una fracción que tiene por numerador el tanto y por denominador 100. $\rightarrow a\% \leftrightarrow \dfrac{a}{100}$

Ejemplo

Vamos a calcular el 15 % de 80:

$$15\,\%\text{ de }80 = \frac{15}{100}\text{ de }80 = (80 : 100) \cdot 15 = 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 12$$

Ejercicio resuelto

Calcular los porcentajes siguientes:

a) 65 % de 590

b) 8 % de 475

a) $65\,\%\text{ de }590 = \dfrac{65}{100}\text{ de }590 = (590 : 100) \cdot 65 =$

$= 5{,}9 \cdot 65 = 383{,}5$

b) $8\,\%\text{ de }475 = \dfrac{8}{100}\text{ de }475 = (475 : 100) \cdot 8 =$

$= 4{,}75 \cdot 8 = 38$

Recuerda

$a\%\text{ de }N = \dfrac{a}{100}\text{ de }N$

Ejemplo:

$15\,\%\text{ de }240 = \dfrac{15}{100}\text{ de }240 =$

$= (240 : 100) \cdot 15 = 2{,}4 \cdot 15 = 36$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Porcentajes con calculadora

Para calcular porcentajes con la calculadora, puedes utilizar la tecla %.

15 % de 240

⇓

240 × 15 % → 36

Algunos porcentajes especiales

Con un poco de ingenio, y basándote en la simplificación de fracciones, el cálculo de algunos porcentajes te resultará muy sencillo.

Veamos algunos ejemplos.

■ **EL 50 %**

$50\,\%$ de $80 = \frac{50}{100}$ de $80 = \frac{1}{2}$ de $80 = 80 : 2 = 40$

El 50 % es la mitad. Para hallar el 50 %, se divide entre 2.

■ **EL 25 %**

$25\,\%$ de $60 = \frac{25}{100}$ de $60 = \frac{1}{4}$ de $60 = 60 : 4 = 15$

El 25 % es la cuarta parte. Para hallar el 25 %, se divide entre 4.

■ **EL 20 %**

$20\,\%$ de $40 = \frac{20}{100}$ de $40 = \frac{1}{5}$ de $40 = 40 : 5 = 8$

El 20 % es la quinta parte. Para calcular el 20 %, se divide entre 5.

■ **EL 10 %**

$10\,\%$ de $70 = \frac{10}{100}$ de $70 = \frac{1}{10}$ de $70 = 70 : 10 = 7$

El 10 % es la décima parte. Para calcular el 10 %, se divide entre 10.

Piensa y practica

11. Calcula mentalmente.

a) 50 % de 18

b) 50 % de 84

c) 25 % de 20

d) 25 % de 48

e) 20 % de 35

f) 20 % de 55

g) 10 % de 190

h) 10 % de 240

12. Reflexiona y justifica los cálculos que hagas:

a) 10 % de 260 = 260 : 10 = 26

b) 5 % de 260 = 26 : 2 = 13

c) 20 % de 55 = 55 : 5 = 11

d) 40 % de 55 = 11 · 2 = 22

e) 25 % de 84 = 84 : 4 = 21

f) 75 % de 84 = 21 · 3 = 63

g) 50 % de 348 = 348 : 2 = 174

h) 5 % de 348 = 174 : 10 = 17,4

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

4 Aumentos y disminuciones porcentuales

Veamos dos tipos de problemas que encontrarás con frecuencia en el mundo real. Analízalos con detenimiento y aprende los métodos de resolución.

Aumentos porcentuales

Un billete de avión a París costaba, el verano pasado, 460 €, pero desde entonces ha subido un 20 %.

¿Cuál es el precio actual del billete?

- **Resolución**

Precio antiguo ⟶ 460 €

Aumento ⟶ 20 % de 460 = $\dfrac{20 \cdot 460}{100}$ = 92 €

$\boxed{\text{PRECIO NUEVO}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} + \boxed{\text{AUMENTO}}$ ⟶ 460 + 92 = 552 €

Por tanto, el precio actual del billete asciende a 552 €.

Disminuciones porcentuales

Una tienda de electrodomésticos saca en oferta, con una rebaja del 15%, un televisor que antes costaba 900 €.

¿Cuánto cuesta, ahora, el televisor?

- **Resolución**

Precio antiguo ⟶ 900 €

Rebaja ⟶ 15 % de 9000 = $\dfrac{15 \cdot 900}{100}$ = 135 €

$\boxed{\text{PRECIO FINAL}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} - \boxed{\text{REBAJA}}$ ⟶ 900 – 135 = 765 €

Por tanto, ahora el televisor cuesta 765 €.

Piensa y practica

1. Rosa pide un préstamo de 4 000 € para devolverlo al cabo de un año.

¿Qué cantidad deberá devolver si el banco le cobra un interés del 5 %?

2. Una aldea tenía, tras el último censo, 250 habitantes, pero desde entonces su población ha disminuido un 8 %.

¿Cuál es la población actual?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Las relaciones de proporcionalidad

1. Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en ir de Palencia a Valladolid.

b) El tiempo que funciona el aspirador y la cantidad de energía que gasta.

c) El peso de un besugo y su coste.

d) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un cubo.

e) La edad de una persona y el número de veces que va al médico.

f) Las veces que un jugador de baloncesto lanza a canasta y los puntos que consigue.

2. Calcula en cada caso el término desconocido:

a) $\frac{6}{10} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{21}{24} = \frac{28}{x}$ c) $\frac{17}{24} = \frac{51}{x}$

d) $\frac{14}{21} = \frac{x}{69}$ e) $\frac{x}{63} = \frac{65}{91}$ f) $\frac{39}{x} = \frac{13}{17}$

g) $\frac{x}{18} = \frac{18}{81}$ h) $\frac{5}{9} = \frac{1}{x}$ i) $\frac{3}{2{,}4} = \frac{35}{x}$

Problemas de proporcionalidad

3. Resuelve mentalmente.

a) Rosa ha pagado 3,60 € por un trozo de queso de 300 gramos. ¿Cuánto pagará por 150 gramos?

b) Dos bolsas de arroz cuestan 2,10 €. ¿Cuánto cuestan tres bolsas?

4. Resuelve por reducción a la unidad.

Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

5. Si con medio kilo de jamón salen cuatro bocadillos, ¿cuánto jamón necesito para 10 bocadillos?

6. Una fábrica ha sacado 2 280 coches en los últimos 15 días. Si sigue con el mismo ritmo de producción, ¿cuántos sacará en los próximos veinte días?

7. Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?

8. Una fuente arroja 42 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 15 minutos?

9. Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

10. Las grosellas se venden a 2,30 euros el cuarto. ¿Cuánto cuesta cuarto y mitad?

11. Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

Porcentajes

12. Calcula mentalmente.

a) 10 % de 340 b) 10 % de 4 800

c) 50 % de 68 d) 50 % de 850

e) 25 % de 40 f) 25 % de 2 000

g) 20 % de 45 h) 20 % de 500

i) 32 % de 50 j) 80 % de 50

13. Calcula con lápiz y papel y, después, comprueba con la calculadora.

a) 15 % de 360 b) 11 % de 3 400

c) 8 % de 175 d) 60 % de 1 370

e) 45 % de 18 f) 84 % de 5 000

g) 150 % de 80 h) 120 % de 350

i) 200 % de 45 j) 250 % de 250

14. Calcula y, si el resultado no es exacto, redondea a las unidades.

a) 16 % de 470 b) 14 % de 288

c) 57 % de 1 522 d) 7 % de 3 640

e) 6 % de 895 f) 92 % de 2 630

g) 115 % de 94 h) 120 % de 751

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

15. Copia y completa cada casilla con un número decimal y, después, calcula el resultado:

a) 20 % de 560 = $\square$ · 560 = …

b) 16 % de 1 250 = $\square$ · 1 250 = …

c) 72 % de 925 = $\square$ · 925 = …

d) 9 % de 700 = $\square$ · 700 = …

e) 2 % de 650 = $\square$ · 650 = …

16. Copia y completa en tu cuaderno.

PARA CALCULAR EL...	20 %	15 %	43 %	65 %	5 %	2 %
SE MULTIPLICA POR...	0,20					

17. Completa con el porcentaje adecuado en cada caso:

a) $\square$ % de 70 = 35

b) $\square$ % de 230 = 115

c) $\square$ % de 800 = 200

d) $\square$ % de 370 = 37

e) $\square$ % de 56 = 5,6

f) $\square$ % de 30 = 6

Problemas de porcentajes

18. Reflexiona y contesta.

a) En una caja de bombones, el 25 % está envuelto. ¿Qué tanto por ciento está sin envolver?

b) Un 35 % de los empleados de cierta fábrica trabajan en turno de mañana; otro 35 %, en el de tarde, y el resto lo hacen en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja en el turno de noche?

19. En mi clase somos 28 y el 25 % nos hemos apuntado a atletismo. ¿Cuántos nos hemos apuntado?

20. Solo el 12 % de los 25 asistentes a la clase de baile son chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas son?

21. Un televisor que costaba 450 € está rebajado un 15 %. ¿Cuánto cuesta tras la rebaja?

22. ¿A cuánto asciende una factura de 85 € después de cargarle el 21 % de IVA?

23. Este año, el 30 % de la vacas de la granja ha tenido un ternero. ¿Cuántas vacas hay en la granja, sabiendo que han nacido 12 terneros?

Autoevaluación

1. Indica si hay relación de proporcionalidad directa o inversa en los siguientes pares de magnitudes:

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

b) El peso de un libro y su precio.

c) El número de horas trabajadas y el pago recibido.

d) El número de caballos que tiene un granjero y el tiempo que tardan en consumir una carga de heno.

e) El número de folios de un paquete y su peso.

2. Completa estas tablas en tu cuaderno:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA			
1	2	3	4
	30		

PROPORCIONALIDAD INVERSA			
1	2	3	4
	30		

3. Resuelve con ayuda de la regla de tres.

Un trozo de queso de 375 gramos ha costado 4,50 €. ¿Cuánto costará otro trozo de 200 gramos?

4. Un jardinero, con su máquina cortacésped, tarda 18 minutos en segar una parcela de 200 m^2. ¿Qué superficie puede segar en hora y media?

5. Calcula.

a) 10 % de 48 b) 30 % de 350 c) 65 % de 520

6. Un colegio tiene 585 estudiantes. El 60 % se queda al comedor. ¿Cuántos estudiantes usan ese servicio?

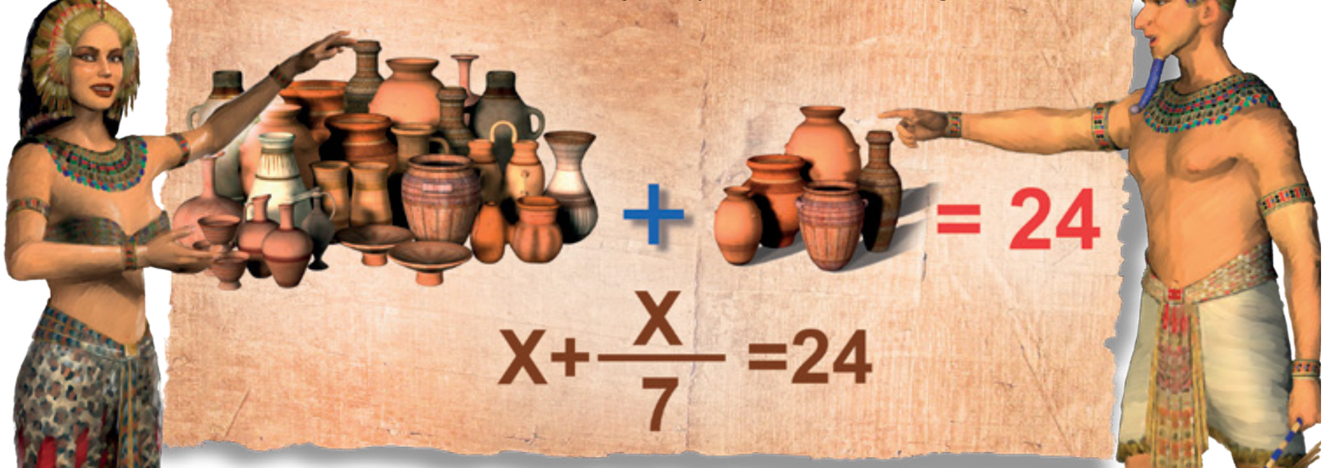
7. Marta ha comprado una blusa que costaba 35 €, pero estaba rebajada un 20 %. ¿Cuánto ha pagado finalmente por la blusa?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

10 Álgebra

La palabra "álgebra" es de origen árabe. Ellos aprendieron de sus predecesores e hicieron progresar esta disciplina en los siglos VIII y IX.

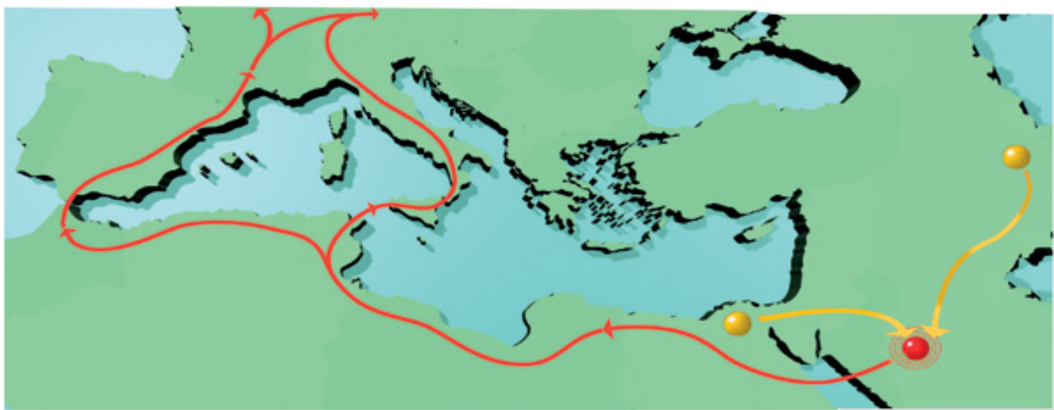
¿Cuánto vale el montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 24?



Este es un problema algebraico que se encuentra planteado y resuelto en un papiro egipcio del año 1650 a. C. Ahora lo resolvemos por un método muy sencillo, mediante una ecuación. Pero hasta llegar aquí, el camino ha sido largo.

Los primeros que desarrollaron métodos sistemáticos para resolver ecuaciones fueron matemáticos árabes. A la incógnita la llamaban "la cosa", algo parecido a lo de "el montón" egipcio.

Unos siglos después, los europeos aprendieron el álgebra de los árabes y la mejoraron pero seguían llamando "la cosa" a la incógnita, y al álgebra, "el arte de la cosa".



© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

1 Letras en vez de números

En muchas tareas de las matemáticas es preciso trabajar con números de valor desconocido o indeterminado. En esos casos, los números se representan por letras y se operan con las mismas leyes y propiedades que en las expresiones numéricas. Veamos algunos ejemplos.

Expresar propiedades aritméticas

- El orden de los sumandos no altera la suma (propiedad conmutativa).

$$a + b = b + a$$

- Multiplicar un número por una suma equivale a multiplicar por cada sumando y sumar los productos parciales (propiedad distributiva).

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

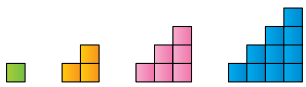
Otro ejemplo

Un múltiplo de un número, a, se obtiene al multiplicar a por cualquier número natural n.

$a \cdot n \longrightarrow$ múltiplo de a

Generalizar relaciones numéricas

- La expresión $\frac{n+n^2}{2}$ generaliza la relación entre la altura de la torre, n, y el número de casillas que contiene:



1 3 6 10 … $\longrightarrow \frac{n+n^2}{2}$

- Las últimas casillas de la siguiente tabla generalizan la ley que define su construcción:

1	2	3	4	5	…	10	…	15	…	$\boldsymbol{n}$
2	5	10	17	26	…	101	…	226	…	$\boldsymbol{n^2+1}$

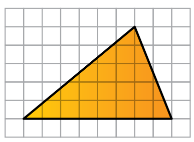
Puedes comprobarlo con algunos ejemplos:

$1 \rightarrow 1^2 + 1 = 2 \qquad 4 \rightarrow 4^2 + 1 = 17 \qquad 15 \rightarrow 15^2 + 1 = 226$

Expresar relaciones entre magnitudes. Fórmulas

- El área de un triángulo, A, se calcula conociendo las longitudes de su base, b, y de su altura, a.

$A = \frac{a \cdot b}{2}$



Base $\rightarrow b = 8$ u
Altura $\rightarrow a = 5$ u
Área $\rightarrow A = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ u^2

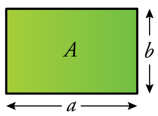
- La distancia, d, recorrida por un móvil a velocidad constante, v, en un cierto tiempo, t, es:

$d = v \cdot t$

Velocidad $\rightarrow v = 60$ km/h
Tiempo $\rightarrow t = 3$ h
Distancia $\rightarrow d = 60 \cdot 3 = 180$ km

Hazlo tú

Expresa con una fórmula el área del siguiente rectángulo:



© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Expresar y operar números desconocidos

Empleando una letra, podemos representar un número cuyo valor aún no conocemos, operar con él y relacionarlo con otros números.

Ejemplo:

- Peso de un tubo de galletas ⟶ x
- Peso de dos tubos de galletas ⟶ $2x$
- Una caja pesa 400 gramos más que un tubo ⟶ $x + 400$
- Peso de dos tubos y una caja ⟶ $2x + (x + 400)$

Codificar matemáticamente un problema y facilitar su resolución

Problema resuelto

Una caja de galletas pesa 400 gramos más que un tubo.

Dos tubos y una caja pesan un kilo (1 000 g).

¿Cuánto pesa un tubo y cuánto una caja?

$$2x + (x + 400) = 1\,000 \quad \rightarrow \quad x = 200$$

Solución: El tubo pesa 200 g. La caja pesa 200 + 400 = 600 g.

En la web

Traduce enunciados a lenguaje algebraico.

- Cuando las letras expresan números, las trataremos como tales en cuanto a las operaciones y sus propiedades.
- La parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de las expresiones con letras y números se denomina **álgebra.**

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno y completa, sabiendo que $a = 5$.

13 ⟶ $\boxed{2 \cdot a + 3}$ ◯ ⟶ $\boxed{2 \cdot a - 3}$

16 ⟶ $\boxed{}$ ◯ ⟶ $\boxed{10 \cdot a + 7}$

2. Escribe una expresión para el valor asociado a n.

a)
$2 \longrightarrow 5$
$6 \longrightarrow 13$
$10 \longrightarrow 21$
$\dots \quad \dots$
$n \longrightarrow ?$

b)
$2 \longrightarrow 0$
$6 \longrightarrow 2$
$10 \longrightarrow 4$
$\dots \quad \dots$
$n \longrightarrow ?$

c)
$2 \longrightarrow 2$
$6 \longrightarrow 30$
$10 \longrightarrow 90$
$\dots \quad \dots$
$n \longrightarrow ?$

3. Llamando x a un número natural, escribe:

a) El doble del número. b) El siguiente del número.

c) La suma del número, su doble y su siguiente.

4. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La suma de un número, x, su doble y su siguiente es 21.

5. Llamando x a la edad de Ana, escribe una expresión matemática para cada apartado:

a) La edad que tendrá dentro de ocho años.

b) La edad que tenía hace dos años.

c) El doble de la edad que tenía hace dos años.

6. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La edad de Ana, dentro de ocho años, será igual al doble de la que tenía hace dos años.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

2 Expresiones algebraicas

Ejemplos

- Un número ⟶ x
- Su siguiente ⟶ $x + 1$
- El doble de su siguiente ⟶ $2 \cdot (x + 1)$
- El cociente entre el número y el doble de su siguiente ⟶ $\dfrac{x}{2 \cdot (x+1)}$

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras.

Son expresiones algebraicas:

$$3x - 5 \qquad x^2 + 1 \qquad \frac{(a+1)\cdot b}{5} \qquad \frac{(t+1)^2}{3} \qquad \frac{a+b}{a}$$

Las operaciones, al incluir valores que no se conocen, quedan necesariamente indicadas.

Monomios

Ten en cuenta

En un monomio no se suelen incluir los signos de producto.

$$5 \cdot x \cdot y^3$$
$$\Downarrow$$
$$5xy^3$$

Cuando encontramos un número seguido de una o varias letras, entendemos que están multiplicados.

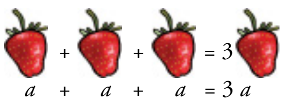
Las expresiones algebraicas más simples, formadas por productos de letras y números, se llaman **monomios.**

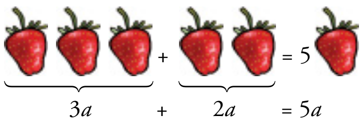
Un monomio consiste en el producto de un número conocido **(coeficiente)** por una o varias letras **(parte literal).**

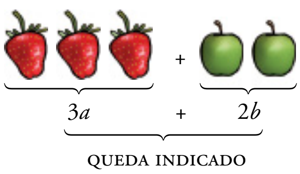
Por ejemplo:

$$\underbrace{-4}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{x}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{a^2 \cdot b}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

Suma y resta de monomios y polinomios







Los monomios solo se pueden sumar (o restar) cuando son semejantes, es decir, cuando tienen la misma parte literal.

Cuando no son semejantes, la operación se deja indicada.

Observa los distintos casos que se presentan en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $4x + 2x = 6x$
EJEMPLO 3 $5x - 3x = 2x$	EJEMPLO 4 $a^2 + a^2 = 2a^2$
EJEMPLO 5 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 6 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 7 $7x - (2x + x) = 7x - 3x = 4x$	EJEMPLO 8 $5a - (a - 4a) = 5a - (-3a) = 5a + 3a = 8a$

Como puedes ver, las expresiones algebraicas se operan con las mismas leyes y propiedades que las expresiones numéricas.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Multiplicación de monomios

Un monomio es un producto. Por tanto, al multiplicar dos monomios obtendrás otro producto con más factores; es decir, otro monomio.

Ejemplos

- $(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$
- $(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot a \cdot 5 \cdot a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$
- $\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot (6xy) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y = \frac{6}{3}x^2y = 2x^2y$

El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

No lo olvides

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

Multiplicación de un monomio por una suma

Cuando uno de los factores es una suma, aplicamos la propiedad distributiva; es decir, multiplicamos por cada sumando.

Ejemplos

- $5 \cdot (2a + 3b) = 5 \cdot 2a + 5 \cdot 3b = 10a + 15b$
- $2x \cdot (x^2 + 2y^2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2y^2 = 2x^3 + 4xy^2$

Piensa y practica

1. Reduce las expresiones siguientes:

a) $x + x$ b) $a + a + a + a$
c) $m + m - m$ d) $k + k + k + k$
e) $a + a + b + b$ f) $x + x + y + y + y$

2. Opera.

a) $2x + 5x$ b) $7a - 3a$
c) $4a + 3a$ d) $9x - 5x$
e) $2x + 3x + 4x$ f) $6a + 2a - 5a$
g) $4a - 3a + a$ h) $10x - 3x - x$

3. Iguala cada expresión con su reducida:

$x + x + 1$	$2x^2 + 2x + 3$
$x^2 + x^2 + x$	$x^2 + 5$
$3x^2 - 2x^2 + 5$	$4x^2 + x + 4$
$x^2 + x^2 + x + x$	$2x^2 + x$
$2x^2 + 4x - 2x + 3$	$2x^2 + 2x$
$9x^2 - 5x^2 + 3 + x + 1$	$2x + 1$

4. Reduce.

a) $x^2 + x^2$ b) $4a^2 - 2a^2$
c) $5a^2 + 2a^2$ d) $7x^2 - 5x^2$
e) $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$ f) $8a^2 - 3a^2 - a^2$

5. Reduce.

a) $3x - (4x - 3x)$ b) $5x - (2x + 1)$
c) $8x - (3x + 2x)$ d) $2x - (4 - x)$
e) $(x + 4x) - (5x - 3x)$ f) $(6x - 4) - (2x - 1)$

6. Multiplica el número por el monomio.

a) $3 \cdot 2x$ b) $5 \cdot 3a$ c) $2 \cdot 4m$
d) $(-3) \cdot 5x$ e) $2 \cdot (-2a)$ f) $(-3) \cdot (-4m)$
g) $\frac{1}{2} \cdot 6x$ h) $4 \cdot \frac{1}{6}a$ i) $(-2) \cdot \frac{6}{8}m$

7. Multiplica los monomios siguientes:

a) $x \cdot 2x$ b) $5a \cdot a$ c) $m \cdot 2m^2$
d) $2x \cdot 5x$ e) $3a \cdot 4a^2$ f) $2m^2 \cdot 5m^2$
g) $3x^2 \cdot 2x^3$ h) $4a \cdot 2a^4$ i) $2m^2 \cdot 2m^4$
j) $x^3 \cdot (-2x)$ k) $(-5a^2) \cdot 3a^3$ l) $2m^3 \cdot (-4m^3)$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

3 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. Sin embargo, no todas las igualdades algebraicas son ecuaciones, como verás a continuación.

Igualdades algebraicas: ecuaciones e identidades

Observa la diferencia entre las igualdades siguientes:

$3x - 4 = 8$	$6x - 4x = 2x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
La igualdad se cumple solamente para $x = 4$. (Es una ecuación)	La igualdad se cumple para cualquier valor de x. (Es una identidad)

- Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras.
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.

Elementos de una ecuación

Para poder manejar las ecuaciones, es necesario que sepas nombrar sus elementos:

- **Miembros:** son las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{4x - 5}^{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \overbrace{2x + 1}^{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en los términos.
- **Soluciones:** son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.

$$4x - 5 = 2x + 1 \begin{cases} \text{ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA} \\ \text{SOLUCIÓN: } x = 3, \text{ ya que } 4 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 1 \end{cases}$$

Ten en cuenta

El **grado** de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que contiene.

- ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

$$5x - 4 = 3x$$

Solución $\rightarrow$ $x = 2$

- ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:

$$6 + x^2 = 5x$$

$$\textit{Soluciones} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Piensa y practica

1. Razona y encuentra una solución para cada una de estas ecuaciones:

a) $5x = 20$ b) $5x - 2 = 18$

c) $\frac{5x-2}{3} = 6$ d) $\frac{5x+4}{8} = 3$

2. Busca, por tanteo, una solución para cada ecuación:

a) $5x - 8 = 7$ b) $2x + 3 = 5x - 3$

c) $2(x - 1) = 8$ d) $10 - (x - 3) = 6$

e) $\frac{3-x}{2} = 1$ f) $\frac{5+x}{6} = 2$

g) $\frac{x-1}{4} = 5$ h) $\frac{x+2}{3} = 1$

i) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ j) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$

k) $x + x^2 + x^3 = 3$ l) $\sqrt{x+5} = 3$

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

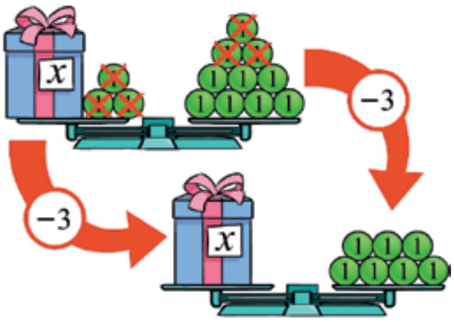
4 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

Ejemplo: $x + 3 = 10$

Restando 3 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x + 3 = 10$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 10 - 3$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \rightarrow x + a - a = b - a \rightarrow x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

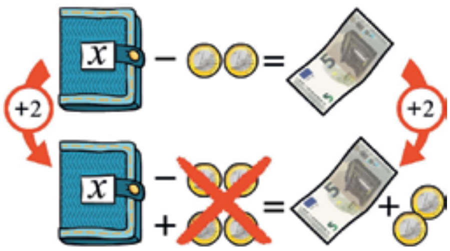
EJEMPLOS

a) $x + 5 = 10$	b) $x + 9 = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 10 - 5$	$x = 5 - 9$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5$	$x = -4$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

Ejemplo: $x - 2 = 5$

Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x - 2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 5 + 2$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \rightarrow x - a + a = b + a \rightarrow x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $x - 8 = 5$	b) $13 - x = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5 + 8$	$13 - 5 = x$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 13$	$x = 8$

Piensa y practica

1. Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$

d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$

g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2. Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$

d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$

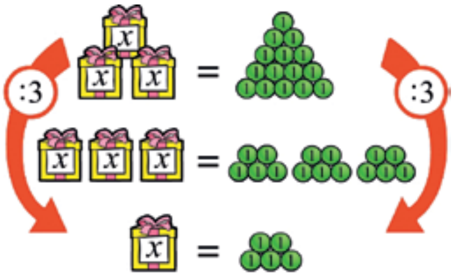
g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

Ejemplo: $3x = 15$

Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$3x = 15$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

La solución es $x = 5$.

En la práctica

REGLA

Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él), pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

b) $7x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$

> Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\Big\}$ $ax = b \rightarrow \frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$

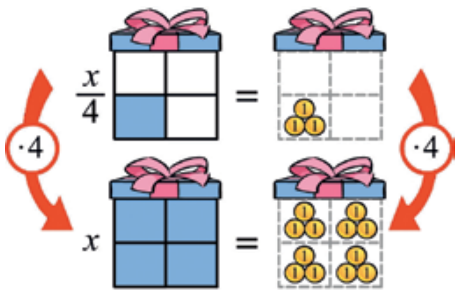
CASOS ESPECIALES

- La ecuación $0 \cdot x = b$ (con $b \neq 0$) no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé un número distinto de cero.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación $x/a = b$

Ejemplo: $\frac{x}{4} = 3$

Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$\frac{x}{4} = 3$$
$$\downarrow$$
$$\frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4$$
$$\downarrow$$
$$x = 12$$

La solución es $x = 12$.

En la práctica

REGLA

Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él), pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{5} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 5 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{x}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

> Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\Big\}$ $\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$

En la web

Practica resolviendo ecuaciones.

Piensa y practica

3. Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\frac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\frac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \frac{x}{2}$

4. Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

5 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

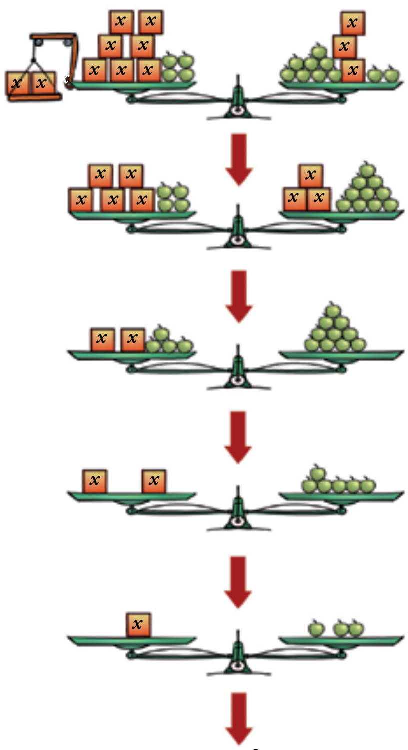
Para resolver una ecuación, la iremos transformando, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes cada vez más sencillas, hasta despejar la incógnita; es decir, hasta que quede sola en un miembro y en el otro un número conocido.

Para transformar una ecuación en otra equivalente, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer sus términos, de un miembro al otro.

Ejemplo

$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$



$x = 3$

Vamos a resolver la ecuación: $7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

$$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$$

REDUCIR →

$$5x + 4 = 10 + 3x$$

TRANSPONER →
(Restamos $3x$ en ambos miembros).

$$5x + 4 - 3x = 10$$

REDUCIR →

$$2x + 4 = 10$$

TRANSPONER →
(Restamos 4 en ambos miembros).

$$2x = 10 - 4$$

REDUCIR →

$$2x = 6$$

TRANSPONER →
(Dividimos a ambos miembros por 2).

$$x = \frac{6}{2}$$

REDUCIR →

$$x = 3$$

Comprobación: Sustituimos x por 3 en la ecuación primitiva y comprobamos que la igualdad se cumple.

$$\boxed{x = 3}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 2x + 4 \rightarrow 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 21 - 6 + 4 = 19 \\ 8 + 3x + 2 \rightarrow 8 + 3 \cdot 3 + 2 = 8 + 9 + 2 = 19 \end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4}_{19} = \underbrace{8 + 3 \cdot 3 + 2}_{19}$$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicio resuelto

Resolver esta ecuación:

$$\boldsymbol{5 - 4x = 7 + 8x - 6}$$

$5 - 4x = 7 + 8x - 6 \;\rightarrow\; 5 - 4x = 1 + 8x$

$5 = 1 + 8x + 4x \;\rightarrow\; 5 = 1 + 12x$

$5 - 1 = 12x \;\rightarrow\; 4 = 12x$

$\dfrac{4}{12} = x \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3}$

Práctica en la resolución de ecuaciones

Los ejercicios que siguen te ayudarán a tomar confianza en la resolución de ecuaciones. Abórdalos en el orden en que aparecen y aplicando las técnicas que has aprendido: *reducir los miembros-transponer los términos*.

Para que puedas evaluar tu trabajo, encontrarás las soluciones al final de la página.

Piensa y practica

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 1 = 6$ b) $x + 8 = 3$
c) $7 = x + 3$ d) $5 = 11 + x$
e) $x + 1 = -2$ f) $x + 5 = -2$
g) $5 + x = 7$ h) $4 + x = 4$
i) $8 + x = 1$ j) $-3 = 2 + x$

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x - 2 = 4$ b) $x - 6 = 7$
c) $2 = x - 2$ d) $5 = x - 1$
e) $x - 4 = -1$ f) $x - 5 = -3$
g) $-4 = x - 2$ h) $-8 = x - 1$
i) $4 - x = 1$ j) $5 - x = 6$
k) $8 = 13 - x$ l) $15 = 6 - x$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x - 4x = 9$ b) $7x - 2x = 15$
c) $x - 2x = 7$ d) $2x - 6x = 12$
e) $2x - 5x = -3$ f) $4x - 6x = -8$
g) $6x - 4x = 1$ h) $11x - 5x = 2$
i) $2x - 7x = 4$ j) $3x - x = -8$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $8x - 5x = x + 8$
b) $3x + 6 = 2x + 13$
c) $5x - 7 = 2 - 4x$
d) $3x + x + 4 = 2x + 10$
e) $4x + 7 - x = 5 + 2x$
f) $8 - x = 3x + 2x + 5$

SOLUCIONES

1. a) 5 b) –5 c) 4 d) –6 e) –3 f) –7 g) 2 h) 0 i) –7 j) –5

2. a) 6 b) 13 c) 4 d) 6 e) 3 f) 2 g) –2 h) –7 i) 3 j) –1 k) 5 l) –9

3. a) 9 b) 3 c) –7 d) –6 e) 1 f) 4 g) 1/2 h) 1/3 i) –4/5 j) –4

4. a) 4 b) 7 c) 1 d) 3 e) –2 f) 1/2

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

6 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Las ecuaciones son una potente herramienta para resolver problemas. Observa en los ejemplos el proceso que hay que seguir. El objetivo es que tú, ante un problema, seas capaz de aplicar ese proceso.

En la web
Resuelve problemas haciendo uso de las ecuaciones.

En la web
Calcula la anchura de un río utilizando ecuaciones.

Problemas resueltos

1. ***Al sumar un número natural con el doble de su siguiente, se obtiene 14. ¿Qué número es?***

a) Deja claro lo que conoces y da nombre a lo que no conoces.

- El número ⟶ x
- Su siguiente ⟶ $x + 1$
- El doble del siguiente ⟶ $2(x + 1)$
- El número más el doble de su siguiente es igual a 14.

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL DOBLE DEL SIGUIENTE}} = 14$$

$$x + 2(x + 1) = 14$$

c) Resuelve la ecuación.

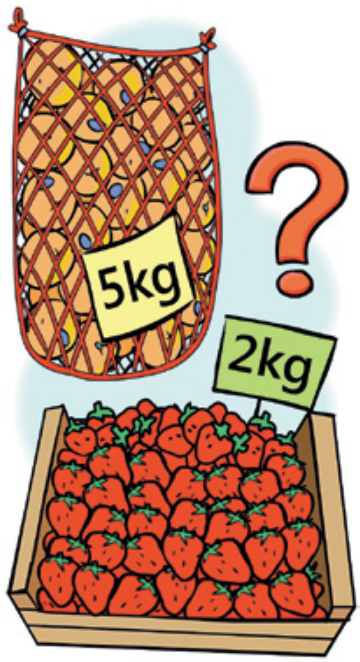
$$x + 2(x + 1) = 14 \to x + 2x + 2 = 14 \to 3x = 12 \to x = \frac{12}{3} = 4$$

d) Expresa la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: El número buscado es 4.

Comprobación: $4 + 2(4 + 1) = 4 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$

2. ***El supermercado vende la bolsa de naranjas de cinco kilos al mismo precio que la caja de fresas de dos kilos. Así, el kilo de fresas sale 1,80 € más caro que el de naranjas. ¿A cómo sale el kilo de naranjas y a cómo el de fresas?***



a) Los datos:

- Coste de un kilo de naranjas (€) ⟶ x
- Coste de un kilo de fresas (€) ⟶ $x + 1{,}80$
- Cinco kilos de naranjas cuestan lo mismo que dos de fresas.

b) La ecuación:

$$\boxed{\text{COSTE DE 5 kg DE NARANJAS}} = \boxed{\text{COSTE DE 2 kg DE FRESAS}}$$

$$5x = 2(x + 1{,}8)$$

c) Resolución de la ecuación:

$$5x = 2(x + 1{,}8) \to 5x = 2x + 2 \cdot 1{,}8 \to 5x = 2x + 3{,}6 \to$$
$$\to 5x - 2x = 3{,}6 \to 3x = 3{,}6 \to x = \frac{3{,}6}{3} = 1{,}2$$

d) *Solución*: Las naranjas se venden a 1,20 €/kg.

Las fresas se venden a 1,20 + 1,80 = 3 €/kg.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 1{,}2 = 6\text{ €} \\ 2(1{,}2 + 1{,}8) = 6\text{ €} \end{array}\right\} 5 \cdot 1{,}2 = 2(1{,}2 + 1{,}8)$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Lenguaje algebraico

1. Asocia la edad de cada personaje con una de las expresiones que hay debajo:

- Jorge tiene x años.
- Pilar, su esposa, tiene 3 años menos.
- Manuel, su padre, le dobla la edad.
- Lola, su madre, tiene 5 años menos que su padre.
- Gema, su hija, nació cuando Jorge tenía 26 años.
- Javi, el pequeño, tiene la mitad de años que la niña.

$x-3$	$x-26$	$2x$
$2x-5$	x	$(x-26):2$

2. Llamando x a un número natural, escribe la expresión algebraica que corresponde a cada enunciado:

a) El siguiente de ese número.

b) Su doble.

c) El doble de su anterior.

d) La mitad del número que resulta al sumarle cinco.

e) El número que resulta al restarle cinco a su mitad.

3. Asigna una expresión algebraica al sueldo de cada uno de los siguientes empleados:

- El sueldo de un informático en cierta empresa es de x euros mensuales.
- Un contable gana un 10 % menos.
- El jefe de su sección gana 700 € más.
- Un operario manual gana 400 euros menos que un informático.
- El gerente gana el doble que un jefe de sección.
- El director gana 800 euros más que el gerente.
- El sueldo de un peón sobrepasa en 200 euros la de un operario manual.

4. Una empresa de ventas online anuncia una promoción de discos, a 4,50 € el álbum, más un fijo de 3,50 € por los gastos de envío. ¿Cuál de las siguientes igualdades relaciona el importe (I) del envío, con el número de discos (d) pedidos?:

a) $I=(3{,}5+4{,}5)\cdot d$ b) $I=3{,}5-4{,}5\cdot d$

c) $I=3{,}5+4{,}5\cdot d$ d) $I=(3{,}5+4{,}5):d$

Monomios y operaciones

5. Opera.

a) $3x+2x+x$ b) $10x-6x+2x$

c) $5a-7a+3a$ d) $a-5a+2a$

e) $-2x+9x-x$ f) $-5x-2x+4x$

6. Reduce todo lo posible.

a) $x+x+y$ b) $2x-y-x$

c) $5a+b-3a+b$ d) $3a+2b+a-3b$

e) $2+3x+3$ f) $5+x-4$

g) $2x-5+x$ h) $3x+4-4x$

i) $x-2y+3y+x$ j) $2x+y-x-2y$

7. Reduce, cuando sea posible.

a) x^2+2x^2 b) x^2+x

c) $3a^2-a-2a^2$ d) a^2-a-1

e) $x^2-5x+2x$ f) $4+2a^2-5$

g) $2a^2+a-a^2-3a+1$ h) $a^2+a-7+2a+5$

8. Multiplica.

a) $2\cdot(5a)$ b) $(-4)\cdot(3x)$ c) $(-2a)\cdot a^2$

d) $(5x)\cdot(-x)$ e) $(2a)\cdot(3a)$ f) $(-2x)\cdot(-3x^2)$

g) $(2a)\cdot(-5ab)$ h) $(6a)\cdot\left(\frac{1}{3}b\right)$ i) $\left(\frac{2}{3}x\right)\cdot(3x)$

9. Divide.

a) $(6x):3$ b) $(-8):(2a)$ c) $(-15a):(-3)$

d) $(2x):(2x)$ e) $(6a):(-3a)$ f) $(-2x):(-4x)$

g) $(15a^2):(3a)$ h) $(-8x):(4x^2)$ i) $(10a):(5a^3)$

Ecuaciones

10. Resuelve.

a) $2x+5-3x=x+19$ b) $7x-2x=2x+1+3x$

c) $11+2x=6x-3+3x$ d) $7+5x-2=x-3+2x$

e) $x-1-4x=5-3x-6$ f) $5x=4-3x+5-x$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x-x+7x+12=3x+9$

b) $6x-7-4x=2x-11-5x$

c) $7x+3-8x=2x+4-6x$

d) $5x-7+2x=3x-3+4x-5$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Resuelve problemas

12. La suma de tres números consecutivos es 57. ¿Qué números son?

13. Si a un número le sumas su mitad y le restas 7, obtienes 17. ¿Qué número es?

14. Si a un número le sumas 20 obtienes el triple que si le restas 8. ¿De qué número se trata?

15. Al sumarle a un número 30 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cuatro. ¿Cuál es el número?

16. Si añadieras 20 botes de kétchup a la estantería, habría el cuádruple que si retiraras 10. ¿Cuántos botes hay en la estantería?

17. Un pastor tiene, entre ovejas y cabras, 231 cabezas. El número de ovejas supera en 83 al de cabras. ¿Cuántas cabras y cuantas ovejas hay en el rebaño?

18. En un garaje hay 12 coches más que motos, y en total contamos 60 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en el garaje?

	MOTOS	COCHES
VEHÍCULOS	x	$x + 12$
RUEDAS	$2x$	$4(x + 12)$

19. Amaya ha encontrado en un cajón 13 monedas, unas de diez céntimos y otras de 20 céntimos, que valen en total 1,70 €. ¿Cuántas hay de cada clase?

 $\rightarrow$ x monedas  $\rightarrow$ $(13 - x)$ monedas

20. Alfredo tiene 36 cromos más que Iván, y si comprara 10 más, tendría el triple. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

Iván $\rightarrow x$ Alfredo $\rightarrow x + 36$

$\boxed{\text{CROMOS DE ALFREDO}} + 10 = 3 \cdot \boxed{\text{CROMOS DE IVÁN}}$

Autoevaluación

1. En una granja hay vacas (V) y avestruces (A).

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones indica el número de cabezas?

b) ¿Y el número de alas?

c) ¿Y el número de patas?

$\boxed{2V + A}$ $\boxed{4V + 2A}$ $\boxed{V + A}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{V - 2A}$

2. Completa en tu cuaderno las tablas siguientes:

n	1	2	3	5	10	15
$n^2 + 3$				28		

1	2	3	5	10	a	n
2	5	10	26	101		

3. Calcula.

a) $x \cdot 3x^3$ b) $15a^3 : 3a^2$ c) $(-2x) \cdot 3x^4$

4. Reduce.

a) $5a^3 - 2a^3$ b) $x + 2 - x^2 + 2x + x^2$

c) $(7x^2 - x) - (4x^2 + 2x)$ d) $3(x^2 - 1) + 2(x - 1)$

5. Resuelve.

a) $3x - 5 + 2x = x + 3$

b) $8 - 2(x + 1) = 5(x - 1) + 4$

6. La suma de tres números naturales consecutivos es 54. ¿Cuáles son esos números?

7. Por tres kilos de naranjas y dos de peras, he pagado 6,40 €. ¿A cómo está el kilo de cada una de esas frutas, si el de peras es veinte céntimos más caro que el de naranjas?

8. En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta, el doble que la pequeña. Si compras una caja de cada tamaño, te llevas 350 unidades. ¿Cuántos clavos tiene cada caja?

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.